PUPIL'S EDITION

THE ELEMENTS OF GEOMETRY

IN

THEORY AND PRACTICE

BY

A. E. PIERPOINT, B.Sc.

AUTHOR OF "A MENSURATION FOR INDIAN SCHOOLS AND COLLEGES," ETC., AND LATE EXAMINER TO THE ALLAHABAD AND PUNJAB UNIVERSITIES.

PART I

भौमितिक सिद्धान्तों और अभ्यासों

का

प्रथम भाग

जिसको

ए० ई० पियरप्वाइंट साहब, बी० एस सी,

सम्पादक "क्षेत्रमिति" इत्यादि और भूतपूर्व परीक्षक इलाहाबाद और पञ्जाब यूनिवर्सिटी ने बनाया।

ALLAHABAD

THE INDIAN PRESS

1917

Price 10 annas. मूल्य ॥=)

PREFACE.

THE aim of this book is to provide a course in the Elements of Geometry embodying those recent reforms in Geometrical Teaching that have been generally approved and adopted.

It comprises (i) an Experimental Section, (ii) a Theoretical Section, and (iii) a Practical Section. The Experimental Section is introductory, and is intended to train the beginner in neatness, accuracy, and the use of graduated ruler, dividers, protractor, set-squares and compasses. No formal definitions are given, but the beginner is led to discover for himself the significance of terms and the properties of figures by a series of simple experiments.

The exercises have largely been drawn from past Examination Papers. The attention of the student is particularly drawn to the exercises underlined, because they give results of importance.

The Publishers issue also a Teacher's Edition of this book. In the Teacher's Edition additional experiments and exercises have been given, hints to the solution of exercises have been added, and model Examination Papers have been inserted.

A. E. PIERPOINT.

भूमिका

इस पुस्तक के बनाने का यह अभिप्राय है कि भूमिति के सिद्धान्तों का एक ऐसा कोर्स उपस्थित किया जाय जिसमें भूमिति-शिक्षा के नये नये सुधार जो सर्वसम्मत होकर व्यवहृत हो रहे हैं, सम्मिलित हों।

इस भाग में (१) प्रयोगात्मक प्रकरण (२) सूत्रात्मक प्रकरण (३) क्रियात्मक प्रकरण तीनों सम्मिलित हैं। प्रयोगात्मक प्रकरण से जो विषय की भूमिका की भाँति है, नवसिखियों को शुद्धता और स्वच्छता के सुधार में पूरी सहायता मिलेगी, साथ ही उनको मापक परकार, प्रोट्रैक्टर और सेट-स्क्वेयर का प्रयोग करना भी आ जायगा। इसमें न्यायशास्त्र की सी एक भी परिभाषा नहीं दी गई है; वरन क्रमानुसार सरल सरल प्रयोगों के द्वारा नवसिखियों को परिभाषाओं के अर्थ और आकृतियों के गुण स्वयं ज्ञात करने के लिए केवल मार्ग दिखा दिया गया है।

बहुत से अभ्यास पिछली परीक्षाओं के पर्चों से लिये गये हैं। विद्यार्थियों को उन अभ्यासों पर भी पूरा ध्यान देना चाहिये जिनके नीचे रेखा खिंची हैं, क्योंकि उनसे बड़े काम के फल निकलते हैं।

मेरी इस पुस्तक की पूरी जिल्द जो शिक्षक के लिये है इंडियन प्रेस इलाहाबाद ने अलग छापी है जिसमें प्रयोग और अभ्यास अधिक दिये हैं, और कठिन कठिन अभ्यासों के सिद्ध करने के लिए संकेत भी दिये हैं। इसके अतिरिक्त परीक्षार्थ प्रश्नों के उत्तम नमूने जहाँ तहाँ रख दिये हैं। जिससे अध्यापक को जिन जिन बातों की आवश्यकता होती है वह सब उसको सुगमता से मिल जायें, और इसकी पूर्ण जानकारी से उसके छात्रों को पूरा लाभ पहुँचे।

ए० ई० पियर प्वाइंट।

सूचीपत्र

प्रयोगात्मक प्रकरण ।

	पृष्ठ
सीधी रेखाओं का खींचना और नापना	१
लम्बाइयों का जोड़, बाक़ी, और भाग	४
कोणों का खींचना और नापना	५
कोणों का जोड़, बाक़ी और भाग	१०
बिन्दु पर के कोण	१२
समानान्तर सीधी रेखायें	१४
त्रिभुज के कोण	१८
उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्रों के कोण	२०
मुख्य मुख्य त्रिभुजों का बनाना और तुलना करना ...	२२
समद्विबाहु त्रिभुज	२४
मुख्य मुख्य त्रिभुजों का बनाना और तुलना करना ...	२५
त्रिभुजों में असमानता	२६
समानान्तर चतुर्भुज	३०
कुछ सरल पिण्ड	३२

सूत्रात्मक प्रकरण ।

प्रस्तावना तथा परिभाषायें	४०
अबाध्योपक्रम...	४६
साधारण स्वयं सिद्धि	४८
साध्यों का वर्णन	४९

पृष्ठ

चिन्ह तथा संकेत ५१
प्रमेयोपपाद्य साध्यों का वर्णन ५२
बिन्दु पर के कोण ५३
साध्य १—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० १३ अ० १) ... ५३
साध्य २—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० १४ अ० १) ... ५५
साध्य ३—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० १५ अ० १) ... ५७
समानान्तर सीधी रेखाएँ ५६
साध्य ४—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २७ अ० १) ... ५६
साध्य ५—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २८ अ० १) ... ६३
असंगति प्रदर्शन ६२
साध्य ६—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २६ अ० १) ... ६५
साध्य ७—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ३० अ० १) ... ६७
ऋजुभुज क्षेत्रों की समानता ६६
साध्य ८—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ३२ अ० १) ... ७४
साध्य ९—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ३२ अ० १ का अनुमान)... ७६
साध्य १०—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ४ अ० १) ... ७६
साध्य ११—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २६ अ० १) ... ८२
साध्य १२—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ५ अ० १) ... ८५
साध्य १३—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ६ अ० १) ... ८७
साध्य १४—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ८ अ० १) ... ८६
साध्य १५—प्रमेयोपपाद्य (यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्ण बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुज दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज अनुरूप होंगे ।) ६२
ऋजुभुज क्षेत्रों की असमानता
साध्य १६—प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० १८ अ० १) ... ६५

पृष्ठ

साध्य १७–प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० १४ अ० १) ... ९६
साध्य १८–प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २० अ० १) ... ९८
साध्य १९–प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २४ अ० १) ... १००
साध्य २०–प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० २५ अ० १) ... १०२
साध्य २१–प्रमेयोपपाद्य—दी हुई सीधी रेखा पर दिये हुए बिन्दु से जो उस रेखा के बाहर है जितनी सीधी रेखा खींची जायँगी उन में लम्ब सब से छोटा होगा। ... १०४
समानान्तर और समलम्ब चतुर्भुजों का वर्णन १०६
साध्य २२–प्रमेयोपपाद्य (रे० सा० ३४ अ० १) ... १०८
साध्य २३–प्रमेयोपपाद्य—यदि तीन या अधिक सीधी रेखाएँ समानान्तर हों और उनको काटने वाली रेखाओं के मध्यस्थ भाग आपस में बराबर हों तो किसी और काटने वाली रेखा के संगतीय मध्यस्थ भाग भी आपस में बराबर होंगे ११२
निधि का वर्णन ११५
साध्य २४–प्रमेयोपपाद्य—किसी बिन्दु का निधि जो दो स्थिर बिन्दुओं से बराबर दूरी पर हो वह लम्ब होगा जो दोनों बिन्दुओं की मिलाने वाली रेखा के अर्धक बिन्दु से खींचा जाय। ११६
साध्य २५–प्रमेयोपपाद्य—किसी बिन्दु का निधि जो दो परस्पर काटने वाली रेखाओं से बराबर दूरी पर हों ऐसी दो सीधी रेखा होंगी जो दी हुई रेखाओं के बीच के कोणों के तुल्य दो भाग करें। ११८
निधियों का परस्पर कटान १२०
निधियों का स्थापन १२१

क्रियात्मक प्रकरण

पृष्ठ

भूमिका १२३

विवेचना तथा पर्य्यालोचना प्रणाली १२४

रेखायें और कोण १२८

साध्य १—वस्तूपपाद्य (रे० सा० ६ अ० १) ... १२८

साध्य २—वस्तूपपाद्य (रे० सा० १० अ० १) ... १२६

साध्य ३—वस्तूपपाद्य (रे० सा० ११ अ० १) ... १३१

साध्य ४—वस्तूपपाद्य (रे० सा० १२ अ० १) ... १३४

साध्य ५—वस्तूपपाद्य (रे० सा० २३ अ० १) ... १३६

साध्य ६—वस्तूपपाद्य (रे० सा० ३१ अ० १) ... १३८

साध्य ७—वस्तूपपाद्य—दी हुई परिमित सीधी रेखा को कई बराबर भागों में विभाजित करना। १३६

त्रिभुजों का वर्णन १४१

साध्य ८—वस्तूपपाद्य—एक त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजायें और बीच का कोण दिया हुआ है। १४१

साध्य ९—वस्तूपपाद्य—एक त्रिभुज बनाओ जिसके दो कोण और एक भुजा ज्ञात हैं।.... ... ... १४२

साध्य १०—वस्तूपपाद्य—(रे० सा० २२ अ० १) ... १४४

साध्य ११—वस्तूपपाद्य—एक त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजा और उनमें से एक के सामने का कोण ज्ञात है। (संशयात्मक दशा) १४५

साध्य १२—वस्तूपपाद्य—एक समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कर्ण और एक भुजा ज्ञात हैं। १४७

आवश्यक सामग्री तथा यंत्र

१—दो काली पेनसिलें—एक "एक एच" वाली और
दूसरी "दो एच" वाली जिनकी नोक सुण्डाकार हो ।

२—शीशे का पत्र—पेनसिलों की नोक बारीक करने के लिए ।

३—वह पटरी—जिसमें इंच और इंच के दसवें भाग तथा सेंटीमीटर
और सेंटीमीटर के दसवें भाग (मिलीमीटर) के चिह्न बने हों ।

४—चाँदा ।

५—परकार—जिनमें पेनसिल लगा सकें ।

६—परकार—जिससे भाग व विभाग कर सकें ।

७—दो सेट-स्क्वेयर—एक ऐसा हो जिसमें ९०°, ४५°, ४५° के कोण
और दूसरा जिसमें ९०°, ६०°, ३०°, के कोण बने हों ।

८—कैंचियाँ ।

९—अक्सी पत्र ।

१०—रबड़ ।

११—गोंद लगा हुआ पत्र ।

१२—पतली दफ्ती ।

१३—पत्र जिसमें इंच के दसवें भाग पर वर्गाकार कोठे बने हों ।

पहिला भाग

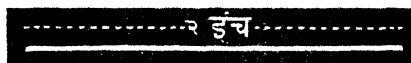
प्रयोगात्मक प्रकरण

सीधी रेखाओं का खींचना और नापना

प्र० १—पटरी की सहायता से, निम्नलिखित लम्बाइयों की सरल रेखाएँ खींचो—

२ इंच, ३·५ इंच, ५·४ इंच, १३ से· मी·, १०·७ से· मी·, ६० मि. मी., ७·४ इंच और १६·७ से. मी. ।

इन रेखाओं को बायें से दाहिनी ओर पटरी से खींचो और इस बात का ध्यान रक्खो कि प्रत्येक रेखा अपनी सम्पूर्ण लम्बाई में समान मोटाई की हो; रेखा की लम्बाई उसके ऊपर लिखो, जैसा निम्न आकृति से प्रकट है ।

२ इंच

यदि उस सीधी रेखा की लम्बाई जिसको खींचना है, पटरी की सम्पूर्ण लम्बाई से अधिक हो तो रेखा के भाग करके खींचो; किन्तु उन भागों को इस प्रकार मिलाओ कि यह न जान पड़े, कि कहाँ पर जोड़े गये हैं ।

प्र० २—सेट-स्क्वेयर की सहायता से, भिन्न भिन्न लम्बाइयों की, आधी दर्जन सरल रेखाएँ खींचो । अपने परकार और पटरी से उनकी लम्बाइयाँ (१) इंचों में (२) सेंटीमीटरों में नापो ।

प्रत्येक रेखा की लम्बाई उसके ऊपर लिख दो जैसा कि प्रयोग १ में बताया है ।

यदि तुम्हारा परकार पेचदार न हो तो लम्बाइयों के लेने में यह उत्तम होगा कि परकार को पहिले भली भाँति खोल लो और फिर उसकी दोनों टाँगों को साथ साथ दबाते हुए अभीष्ट लम्बाई तक लाकर बन्द कर दो, सिरों को धीरे से दबाओ ऐसा न हो कि पटरी पर खरोंच आ जाय या कागज़ कहीं फट जाय। सम्पूर्ण दशाओं में यदि लम्बाई जिसको तुम नाप रहे हो पटरी के विभागों में से किसी एक पर ठीक ठीक समाप्त न होती हो तो इंच के लगभग १/१०० भाग तक लम्बाई का अनुमान कर लो, यदि तुम इंचों में लम्बाई को नापना चाहते हो, या सेंटीमीटर के १/१०० भाग तक अर्थात् मिलीमीटर के दसवें भाग तक, यदि तुम सेन्टीमीटर स्केल का प्रयोग कर रहे हो।

जैसे,

अ ब = ०·४५ इंच

अ स = १·२७ इंच

अ द = २·४९ इंच

यदि यह लम्बाई जिसको तुम नाप रहे हो तुम्हारी पटरी की सम्पूर्ण लम्बाई से या तुम्हारे परकार के फैलाव से अधिक बड़ी हो तो उसके भागों को अलग अलग नाप लो और फलों को जोड़ लो।

प्र० ३—अपने सेट-स्क्वेयर की सहायता से चार सीधी रेखा, भिन्न भिन्न लम्बाइयों की खींचो, उन पर नम्बर लगाओ और उनकी लम्बाइयाँ (१) इंचों में (२) सेन्टीमीटरों में अनुमान द्वारा ज्ञात करो, फिर अपने परकार और पटरी से, अनुमान द्वारा ज्ञात की हुई लम्बाइयों की तुलना करो और उत्तरों को इस प्रकार चक्र में लिखो—

रेखा	कल्पित लम्बाई	वास्तविक लम्बाई
१		
२		
३		
४		

प्र० ४—नीचे लिखी हुई वस्तुओं की लम्बाइयाँ (१) इंचों में (२) सेन्टीमीटरों की संख्या में पहिले अनुमान से बताओ और फिर अपने अनुमानों की, अपने परकार और पटरी से नाप कर जाँच करो:—

इस पृष्ठ की लम्बाई, अपनी पेंसिल की लम्बाई, अपनी पटरी की चौड़ाई और इस पुस्तक की मोटाई। और अपने उत्तरों को जैसा कि प्रयोग ३ में किया है एक चक्र के रूप में लिखो।

प्र० ५—अपने सेट-स्क्वेयर की सहायता से जहाँ तक ठीक संभव हो निम्न लिखित लम्बाइयों की सरल रेखाएं अपने स्मरण से खींचो:—

१ इंच, १ से· मी·, २·५ इंच, ३·२ से· मी·, ५ इंच और ११ से· मी· अपने परकार और पटरी की सहायता से अपने अनुमानों की जाँच करो। कल्पित और वास्तविक लम्बाई प्रत्येक रेखा के ऊपर लिख दो।

प्र० ६—अपने परकार की सहायता से ४·३ इंच लम्बी सीधी रेखा खींचो और उसकी लम्बाई सेन्टीमीटरों में नापो और अब बताओ कि एक इंच में दशमलव के प्रथम स्थान तक कितने सेन्टीमीटर हुए। ३·८ इंच लम्बी सीधी रेखा के लिए भी ऊपर लिखी हुई क्रिया करो और देखो कि प्रत्येक दशा में, एक इंच के बराबर उतने ही सेन्टीमीटर संख्या में होते हैं या नहीं।

लम्बाइयों का जोड़, बाक़ी और भाग

प्र० ७—अपने परकार की सहायता से अ ब, ब स और स द को इंचों में नापो, फलों को जोड़ो और सम्पूर्ण रेखा अ द को नाप कर उत्तर का ठीक होना प्रकट करो।

अ ब स द

इस प्रकार लिखो—अ ब की लम्बाई = इंच
ब स " " = "
स द " " = "
―――――
अ द " " = "

प्र० ८—प्रयोग ७ की आवृत्ति करो, किन्तु इंचों के स्थान पर अब सेन्टीमीटरों का व्यवहार करो।

प्र० ९—अ ब और ब स को अपने परकार की सहायता से इंचों में नापो, फलों का अन्तर निकालो और अ स को नाप कर उत्तर की शुद्धता प्रकट करो।

अ स ब

इस प्रकार लिखो अ ब की लम्बाई = इंच
ब स " " = "
―――――
अ स " " = "

प्र० १०—अपने परकार की सहायता से ४·३ इंच लम्बी सीधी रेखा खींचो और उसमें क्रम से १·७ इंच, ०·६ इंच, १·१ इंच के बराबर रेखा में चिह्न लगाओ।

अब सिद्ध करो कि अङ्कगणित और क्षेत्रगणित दोनों से जो भाग कि बाक़ी रह गया है १·६ इंच के बराबर है।

प्र० ११—अपने सेट-स्क्वेयर की सहायता से आधी दर्जन सीधी रेखाएँ, भिन्न भिन्न लम्बाइयों की खींचो, उनकी लम्बाइयों को अपने परकार और पटरी से नापो, प्रत्येक लम्बाई का आधा करो और इस प्रकार अर्द्धक बिन्दु ज्ञात करो और प्रत्येक रेखा पर चिह्न लगा कर अर्द्धक बिन्दु प्रकट करो। यदि लम्बाई के आधा करने में दशमलव का तीसरा अंक आता हो तो उसको छोड़ दो।

प्र० १२—अपने सेट-स्क्वेयर की सहायता से आधी दर्जन सीधी रेखाएँ, भिन्न भिन्न लम्बाइयों की खींचो और प्रत्येक रेखा कम से कम ५ इंच लो; उनके अर्द्धक बिन्दुओं पर अपने अनुमान से चिह्न लगाओ और फिर ग्यारहवें प्रयोग की भाँति गणना करके वास्तविक अर्द्धक बिन्दु ज्ञात करो।

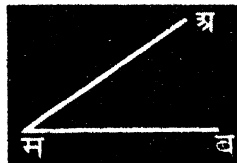
प्र० १३—निम्नलिखित लम्बाइयों की, सीधी रेखा खींचो और गणना करके उनको (१) तीन (२) पाँच बराबर भागों में बाँटोः—६ इंच, ४·५ इंच, १५ से. मी; १३·५ से. मी.।

प्र० १४—अपने सेट-स्क्वेयर की सहायता से तीन सीधी रेखा, भिन्न भिन्न लम्बाइयों की खींचो और प्रत्येक रेखा कम से कम ५ इंच लो, उन पर नम्बर लगाओ और अनुमान से उनको (१) तीन (२) पाँच बराबर भागों में बाँटो। नाप कर अपने अनुमानों की तुलना करो और अपनी भूल इस प्रकार चक्र में प्रकट करो।

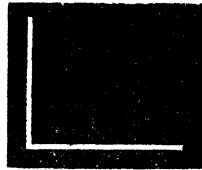
रेखा १—कल्पित तीसरे भाग = १·६७ इंच, १·७० इंच, और १·७६ इंच

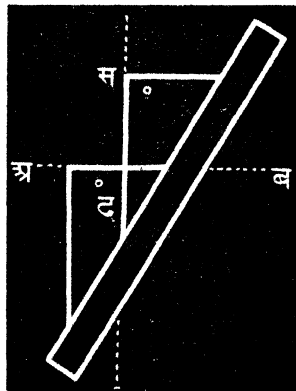
,, पाँचवें भाग =

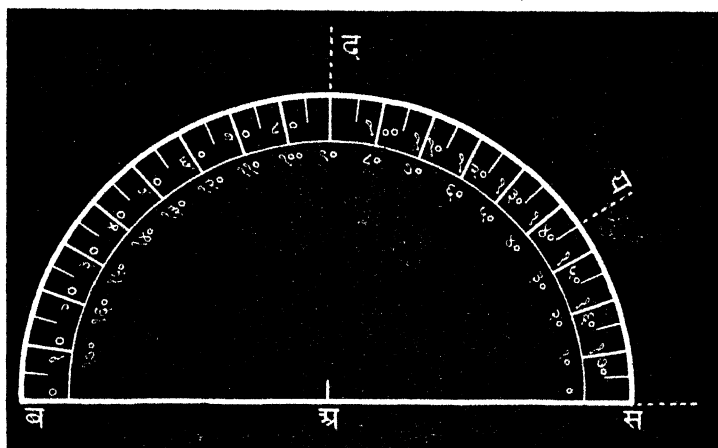
कोणों का खींचना और नापना

प्र० १५—म अ और म ब दो सीधी रेखा एक ही बिन्दु म से भिन्न दिशाओं में खींचो, इस प्रकार—

म अ और म ब से जो कोण बनता है अ म ब (या ब म अ या केवल म) कहलाता है और इन रेखाओं को कोण की **भुजाएँ** कहते हैं और बिन्दु म को कोण का **शीर्ष** बोलते हैं ।

आगे चल कर हम बतायेंगे कि इन भुजाओं की लम्बाइयों पर कोण के परिमाण का घटना बढ़ना निर्भर नहीं है ।

यदि कोण की भुजाएँ एक दूसरी पर सीधी खड़ी हों, जैसे—

तो ऐसे कोण को **समकोण** कहते हैं ।

प्र० १६—अपने सेट-स्क्वेयर और पटरी से एक समकोण बनाओ और उसकी प्रत्येक भुजा को एक इंच दिखाओ ।

ऊपर की आकृति से उसके बनाने का ढंग ज्ञात होगा । अ ब रेखा खींचो, सेट-स्क्वेयर और पटरी को जैसा आकृति में दिखाया गया है रक्खो, पटरी

के सहारे से सेट-स्क्वेयर को एक स्थान से दूसरे स्थान में ले जाओ और फिर स द रेखा खींचो।

प्र० १७—अपने प्रोट्रैक्टर से एक समकोण बनाओ और उसकी प्रत्येक भुजा को ४·२ से. मी. रक्खो।

ऊपर की आकृति से इसके बनाने की प्रणाली ज्ञात होगी। देखो कोण की एक भुजा पर तो प्रोट्रैक्टर का आधार रक्खा हुआ है और दूसरी भुजा अ से जो प्रोट्रैक्टर के केन्द्र पर है एक ऐसी सीधी रेखा खींची गई है जो द के नीचे जाती है जहाँ कि ९०° का चिह्न बना हुआ है। एक आलपीन का चिह्न अ पर और दूसरा द पर लगा देने से कोण की दूसरी भुजा के ठीक ठीक खींचने में सहायता मिलेगी।

प्र० १८—अपने प्रोट्रैक्टर की सहायता से एक समकोण बनाओ; उसकी भुजाएँ जितनी तुम चाहो रख लो। अपनी कतरनी से कागज़ में से इसको अलग काट लो, इस प्रकार—

अब इसको इस प्रकार मोड़ो कि एक भुज दूसरी पर ठीक पड़ जाय, तह को खोलो, देखो बीच से समकोण दो बराबर कोणों में विभाजित हो गया। इस प्रकार—

यदि इसी प्रकार काटते और फिर मोड़ते जायँ तो समकोण चार बराबर कोणों में बट जावेगा या समकोण के चौथाई भाग ज्ञात हो जायँगे।

समकोण के $\frac{१}{९०}$ भाग को अंश कहते हैं, इसलिए अर्ध समकोण में ४५ अंश (४५° लिखते हैं) होते हैं और २२½° चौथाई समकोण में।

बताओ कितने अंश होंगे :—

(१) समकोण के आठवें भाग में? (उ० ११¼)

(२) दो समकोणों में ? (उ० १८०)

प्र० १९—अपने प्रोट्रैक्टर से ३५° का कोण बनाओ।

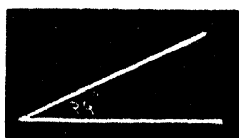
प्रयोग १७ की आकृति से इसके बनाने की रीति ज्ञात होगी। देखो एक भुज पर तो प्रोट्रैक्टर का आधार रक्खा हुआ है और दूसरी भुज अ से जो प्रोट्रैक्टर का केन्द्र है य बिन्दु तक खींची हुई है जहाँ पर ३५° का चिह्न बना हुआ है।

यह भी देखो कि प्रोट्रैक्टर पर दो प्रकार के नम्बर लगे हुए हैं, एक ओर से उन कोणों के अंश ज्ञात होते हैं जिनकी एक भुजा अ ब पर रखते हैं और

दूसरी ओर से उन सम्पूर्ण कोणों के अंश ज्ञात होते हैं जिनकी एक भुजा अ ब को ढक लेती है, इस बात का सदैव ध्यान रक्खो कि ठीक ओर के अंश व्यवहार में आवें ताकि अशुद्धि न हो।

प्र० २०—अपने प्रोट्रैक्टर से निम्न लिखित कोण बनाओ :—

२५°, ७२°, ९°, ७०°, १७३°, और ११३°,

प्रत्येक कोण का परिमाण उसके अन्दर लिख दो, इस प्रकार—

प्र० २१—भिन्न भिन्न परिमाणों के आधे दर्जन कोण अपनी पटरी से बनाओ और फिर अपने प्रोट्रैक्टर से उनको नापो, प्रत्येक कोण के अन्दर उसका परिमाण लिख दो। सम्पूर्ण दशाओं में, जब कभी कोण जिसको तुम नाप रहे हो प्रोट्रैक्टर के किसी अंश पर ठीक ठीक समाप्त न हुआ करे तो उसके परिमाण का अनुमान पास के आधे अंश तक कर लिया करो।

प्र० २२—अपने सेट-स्क्वेयरों के कोणों को नापो (३०°, ६०°, ९०°, ४५°, ४५° और ९०°)।

प्र० २३—अपनी पटरी से तीन कोण, भिन्न भिन्न परिमाणों के बनाओ, उन पर नम्बर लगाओ और अनुमान से बताओ कि प्रत्येक में कितने अंश हैं। अपने अनुमानों की अपने प्रोट्रैक्टर से नाप कर तुलना करो और अपने उत्तरों को इस प्रकार चक्र में लिखोः—

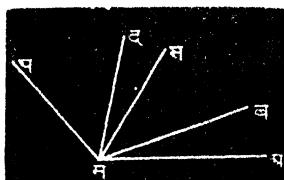
कोण	कल्पित अंश	वास्तविक अंश
१		
२		
३		

प्र० २४—पटरी की सहायता से नीचे लिखे हुए कोणों को जहाँ तक ठीक सम्भव हो, अपने स्मरण से बनाओः—

४५°, ३०°, ६०°, १०°, ८०° और १३५°

अपने प्रोट्रैक्टर से नाप कर, अनुमान किये हुए कोणों के परिमाण की तुलना करो और कल्पित और वास्तविक परिमाण प्रत्येक कोण के अन्दर लिख दो।

कोणों का जोड़, बाक़ी और भाग

प्र० २५—अपने प्रोट्रैक्टर से अ म ब, ब म स, स म द और द म य कोणों को नापो, फलों को जोड़ो और कुल कोण अ म य को नाप कर अपने योग फल की शुद्धता प्रकट करो।

इस प्रकार लिखो—

कोण अ म ब =   अंश
,, ब म स =   ,,
,, स म द =   ,,
,, द म य =   ,,

———

,, अ म य =   ,,

प्र० २६—अपने प्रोट्रैक्टर से अ म ब और अ म स कोणों को नापो फलों को घटाओ और फिर ब म स कोण को नाप कर बाक़ी की शुद्धता प्रकट करो।

इस प्रकार लिखो—

कोण अ म स=

,, अ म व=

,, व म स=

प्र० २७—११३° का कोण बनाओ और अपने प्रोट्रैक्टर के द्वारा १६°, ३७°, और ५४° क्रमशः घटा दो और अब अंकगणित और क्षेत्रगणित दोनों से सिद्ध करो कि जो भाग बाकी रहा है वह ३° है।

प्र० २८—भिन्न भिन्न परिमाणों के, आधे दर्जन कोण अपनी पटरी से खींचो जिनमें से तीन समकोण से बड़े हों और तीन छोटे हों और अपने प्रोट्रैक्टर से उनको नापो, प्रत्येक कोण के परिमाण को दो से विभाजित करके उसका आधा ज्ञात करो और प्रत्येक कोण की अर्द्धक रेखा खींचो अर्थात् वह रेखा जो कोणों को दो तुल्य भागों में विभाजित कर दे।

प्र० २९—नीचे लिखे परिमाणों के कोण, अपने प्रोट्रैक्टर से बनाओ और जैसा कि प्रयोग २८ में किया है गणना करके उनकी अर्द्धक रेखा ज्ञात करो—

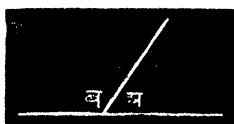
३८°, ८६°, ११२°, १६४°, ६५°, और १०३°

प्र० ३०—भिन्न भिन्न परिमाणों के, आधे दर्जन कोण अपनी पटरी से बनाओ और अपने अनुमान से उनकी अर्द्धक रेखाएँ खींचो और फिर जैसा कि प्रयोग २८ में किया था गणना करके उनकी वास्तविक अर्द्धक रेखाएँ ज्ञात करो।

प्र० ३१—निम्न लिखित कोणों को बनाओ, फिर गणना करके उनके (१) तीन बराबर (२) पाँच बराबर भाग करोः—

६०°, ९०°, ३०°, १२०°, १०५°, और १८०°

बिन्दु पर के कोण

प्र० ३२—एक सीधी रेखा खींचो और उस पर एक और सीधी रेखा खड़ी करो। इस प्रकार—

कोण अ और ब को जो इस प्रकार पैदा होते हैं अपने प्रोट्रैक्टर से नापो और जो परिमाण आवें उनको जोड़ो और फलों को इस प्रकार लिखो—

अ = अंश

ब = ,,

———— ————

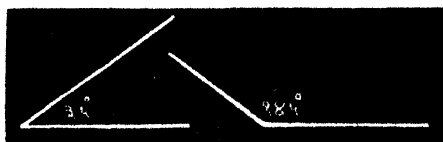
अ + ब = ,,

प्र० ३३—छः स्थानों पर दो दो सीधी रेखा लेकर प्रयोग ३२ को दोहराओ और बताओ कि प्रत्येक स्थान के दो कोणों के योग के विषय में तुमको क्या बात ज्ञात होती है।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं :—

यदि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी हो तो उन दोनों कोणों का योग जो इस प्रकार पैदा होते हैं बराबर दो समकोण के होता है।

इसको कंठाग्र करलो।

प्र० ३४—दो कोण ऐसे बनाओ जिनके परिमाणों का जोड़ १८०° के बराबर हो, इस प्रकार—

अपनी कतरनी से उनको काट लो और दोनों को मिला कर इस प्रकार रक्खो कि एक कोण का शीर्ष और भुजा, दूसरे के शीर्ष और भुजा पर पड़ें; किन्तु कोण एक दूसरे के बाहर स्थित हों। जैसे—

अपनी पटरी को इन कोणों की दूसरी भुजाओं पर रक्खो और इस बात का ध्यान रक्खो कि वह एक ही सीधी रेखा में रहें।

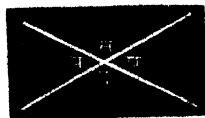
प्र० ३५—प्रयोग ३४ की आवृत्ति करो, इस प्रकार कि आधे दर्जन दो दो कोण लेकर बताओ कि उन दो भुजाओं के विषय में जो एक दूसरे पर स्थिति नहीं होती, क्या बात ज्ञात होती है।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो आसन्न कोणों का योग दो सम कोणों के बराबर हो तो इन कोणों की बहिर्भुजाएँ एक ही सीधी रेखा में स्थित होती हैं।

इसको कंठाग्र करलो।

(इन कोणों को आसन्न इस लिए कहते हैं कि वह एक दूसरे के समीप होते हैं)

प्र० ३६—एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा को काटती हुई खींचो, इस प्रकार—

अ, ब, स, और द चार कोण जो इस प्रकार पैदा हुए उनमें से सामने के कोणों (१) अ और ब को और (२) स और द को नापो,

फलों को चक्र में लिखो इस प्रकार—

अ =	अंश	स =	अंश
ब =	,,	द =	,,

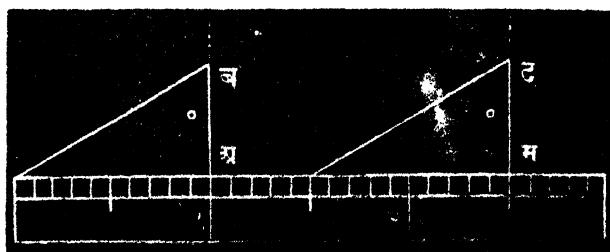
प्र० ३७—प्रयोग ३६ की इस प्रकार आवृत्ति करो कि पहिले दो दो सीधी रेखाएँ एक दूसरे को काटती हुई आधी दर्जन लो और फिर बताओ कि सन्मुख कोणों के परिमाणों के विषय में तुमको क्या बात ज्ञात होती है।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो सीधी रेखाएं एक दूसरे को काटें तो सन्मुख कोण आपस में बराबर होते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो। (इन कोणों को सन्मुख कोण इसलिए कहते हैं क्योंकि उनके शीर्ष कोण एक ही हैं)

समानान्तर सीधी रेखा

प्र० ३८—अपनी पटरी के सहारे अपने सेटस्क्वेयर को सरकाओ यहां तक कि उसके दोनों रूप ऐसे ज्ञात हों जैसे कि नीचे की आकृति में दिखलाये गये हैं।

अ ब और स द सीधी रेखाओं को खींचो, यह सीधी रेखा समानान्तर होंगी और एक दूसरे से १$\frac{१}{६}$ इंच की दूरी पर रहेंगी।

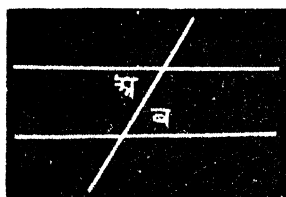
प्र० ३९—अपने सेट-स्क्वेयर और पटरी की सहायता से दो ऐसी समानान्तर सीधी रेखा खींचो जो एक दूसरे से १$\frac{३}{८}$ इंच की दूरी पर हों।

प्र० ४०—एक दी हुई सीधी रेखा के समानान्तर, एक ऐसी रेखा खींचो जो दी हुई रेखा से २$\frac{१}{६}$ इंच की दूरी पर हो।

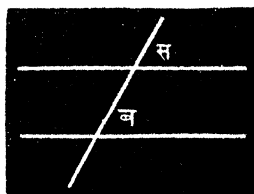
इस दशा में सेट-स्क्वेयर की अ ब रेखा (उक्त आकृति) दी हुई रेखा पर पड़ेगी।

प्र० ४१—एक दिये हुए बिन्दु से, एक दी हुई सीधी रेखा के समानान्तर रेखा खींचो।

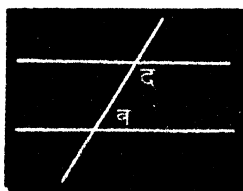
इस दशा में सेट-स्क्वेयर के पहिले स्थान की अ ब रेखा (उपरोक्त आकृति) दी हुई रेखा पर पड़ेगी और दूसरे स्थान की स द रेखा दिये बिन्दु पर से होकर आयगी।

प्र० ४२—एक सीधी रेखा, दो समानान्तर सीधी रेखाओं को काटती हुई खींचो, इस प्रकार—

अ और ब "एकान्तर" कोणों को नापो और उनके परिमाणों को स्मरण रखने के लिए लिख लो।

प्र० ४३—काटने वाली रेखा को, छः भिन्न भिन्न प्रकार से रख कर प्रयोग ४२ का अभ्यास करो और बताओ कि एकान्तर कोणों के विषय में तुमको क्या बात ज्ञात होती है।

प्र० ४४—एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं को काटती हुई खींचो। इस प्रकार—

ब और स "संगती" कोणों को नापो और उनके परिमाणों को स्मरण रखने के लिए लिख लो।

प्र० ४५—काटनेवाली सीधी रेखा को छः भिन्न भिन्न रूपों में रख कर प्रयोग ४४ का अभ्यास करो और बताओ कि संगती कोणों के सम्बन्ध में तुमको क्या बात ज्ञात होती है।

प्र० ४६—एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं को काटती हुई खींचो। इस प्रकार—

काटने वाली रेखा की एक ओर के दो "अन्तः" कोणों ब और द को नापो और उनके अंशों की संख्या को अलग अलग और जोड़ कर लिख दो—

ब = अंश

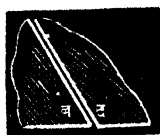
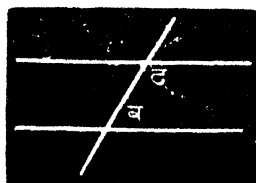
द = ,,

———— ————

ब + द = ,,

प्र० ४७—काटने वाली रेखा को छः भिन्न भिन्न रूपों में रख कर प्रयोग ४६ का अभ्यास करो और बताओ कि इस सीधी रेखा के एक ओर जो दो अन्तःकोण स्थित हैं, उनके सम्बन्ध में तुमको क्या बात ज्ञात हुई।

प्र० ४८—प्रयोग ४७ में जो बात तुमको ज्ञात हुई है, उसकी स्पष्टता इस प्रकार करो कि दोनों अन्तःकोण काट कर एक दूसरे पर इस प्रकार रक्खो कि एक का शीर्ष कोण और भुजा, दूसरे के शीर्ष कोण और भुजा पर पड़ें, किन्तु प्रत्येक कोण एक दूसरे से बाहर की ओर स्थित हो।

इस प्रकार—

४२ से ४८ तक जो प्रयोग हमने किये हैं, उनसे हम यह फल निकालते हैं:—

अगर एक सीधी रेखा, दो समानान्तर सीधी रेखाओं को काटें तो—

(१) एकान्तर कोण आपस में बराबर होते हैं।

(२) संगति कोण आपस में बराबर होते हैं।

(३) काटने वाली रेखा के एक ओर के दो अन्तःकोण मिल कर दो सम कोण के बराबर होते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो ।

प्र० ४९—तीन आकृति बनाओ जिनमें एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं को काटे, किन्तु पहिली आकृति में एकान्तर कोण आपस में बराबर हों, और दूसरी में संगती कोण, और तीसरी में रेखा की एक ओर के दो अन्तःकोण बराबर १८०° के हों ।

अपनी पटरी और सेट-स्क्वेयर से सिद्ध करो कि तीनों दशाओं में, दोनों सीधी रेखा एक दूसरे के समानान्तर हैं ।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

जब एक सीधी रेखा, दो सीधी रेखाओं को काटे, और यदि

(१) एकान्तर कोण आपस में बराबर हों, या

(२) संगती कोण आपस में बराबर हों, या

(३) रेखा के एक ओर के दो अन्तःकोण बराबर दो सम कोण के हों, तो दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी ।

इसको कंठाग्र कर लो ।

प्र० ५०—दो सीधी रेखा एक ही सीधी रेखा के समानान्तर खींचो (देखो प्रयोग ४०) और अपनी पटरी और सेट-स्क्वेयर से सिद्ध करो कि वह आपस में समानान्तर हैं ।

इस प्रयोग से हम यह फल निकालते हैं:—

सीधी रेखाएँ जो एक ही सीधी रेखा की समानान्तर होती हैं आपस में भी समानान्तर होती हैं ।

इसको कंठाग्र कर लो ।

त्रिभुज के कोण

प्र० ५१—आधी दर्जन भिन्न भिन्न प्रकार की किन्तु तीन रेखाओं से घिरी हुई आकृतियां खींचो, इनका नाम त्रिभुज रक्खो ।

प्र० ५२—एक त्रिभुज बनाओ और उसके अ, ब और स अन्तःकोणों को नापो, उनके परिमाणों को जोड़ो और फलों को लिख लो।

इस प्रकार—

अ = अंश

ब = ,,

स = ,,

अ + ब + स = ,,

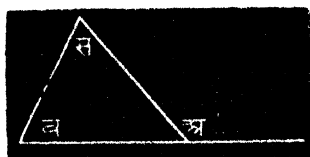
प्र० ५३—भिन्न भिन्न आकृति के छः त्रिभुज लेकर ५२ वें प्रयोग का अभ्यास करो और बताओ कि प्रत्येक त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों के योग के विषय में तुमको क्या बात ज्ञात हुई।

प्र० ५४—प्रयोग ५३ में जो बात तुमको ज्ञात हुई है उसकी स्पष्टता इस प्रयोग से यों करो, एक त्रिभुज बनाओ, इसके तीनों अन्तःकोणों को काट कर और जिस प्रकार निम्न आकृति में दिखाया है पास पास रख दो।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग बराबर दो समकोण के होता है।

इसको कंठाग्र कर लो।

प्र० ५५—एक त्रिभुज बनाओ और उसकी किसी एक भुजा को इस प्रकार बढ़ाओ।

बहिःकोण अ और सामने के अन्तःकोण ब और स को नापो और अ के अंशों की, ब और स के अंशों के योग से तुलना करो।

अ =	अंश	ब =	अंश
		स =	,,
		ब + स =	,,

प्र० ५६—आधे दर्जन त्रिभुज लेकर ५५ वें प्रयोग का अभ्यास करो और बताओ कि बहिः कोण की अंशों की संख्या की; सामने के दोनों अन्तः-कोणों के योग से तुलना करने पर तुमको क्या बात ज्ञात हुई ?

प्र० ५७—प्रयोग ५६ में जो बात तुमको ज्ञात हुई है, उसकी स्पष्टता सामने के दोनों अन्तःकोणों को काट करके बहिःकोण पर "आच्छादन" करके करो।

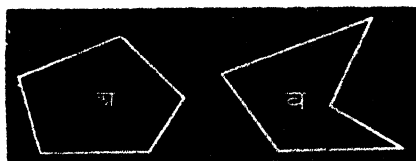
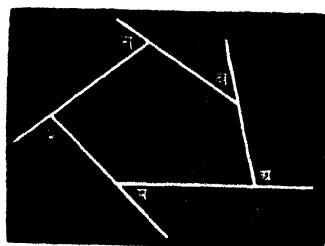
इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जावे तो इस प्रकार जो बहिःकोण बनेगा वह सामने के दोनों अन्तःकोणों के योग के बराबर होगा।

इसको कंठाग्र कर लो।

उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्रों के कोण

प्र० ५८—भिन्न भिन्न प्रकार की छः आकृति, चार या अधिक सीधी रेखाओं से घिरी हुई बनाओ इनके नाम बहुभुजक्षेत्र रक्खो। कोई आकृति उन्नतोदर बहुभुज तब कही जाती है जब कि उसका प्रत्येक अन्तःकोण दो सम-कोणों से कम हो या यों कहो कि उसके कोण बाहर की ओर निकले हुए हों।

निम्न आकृति में अ उन्नतोदर बहुभुज है किन्तु ब नहीं है।

प्र० ५९—एक उन्नतोदर बहुभुजक्षेत्र बनाओ, इसकी भुजाओं को क्रम से बढ़ाओ। इस प्रकार:—

कल्पना करो अ, ब, स, द और य जो इस प्रकार पैदा हुए हैं, बहिःकोण हैं उनको नापो और परिमाणों को जोड़ो और फल को इस प्रकार लिखो:—

अ =	अंश
ब =	,,
स =	,,
द =	,,
य =	,,
अ + ब + स + द + य =	,,

प्र० ६०—आधे दर्जन ऐसे उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र लेकर प्रयोग ५९ की, आवृत्ति करो जो आकृति और भुजाओं की संख्या के विचार से भिन्न हों। और बताओ कि भुजाओं को इस प्रकार क्रमशः बढ़ाने से जो अन्तःकोण बनते हैं उनके योग के विषय में तुमको क्या बात सदैव ज्ञात होती रही है।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि एक उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र की भुजाएँ क्रमशः बढ़ाई जावें तो इस प्रकार जो बहिःकोण पैदा होते हैं उनका योग बराबर चार सम कोणों के होता है।

इसको कंठाग्र कर लो।

प्र०६१—एक उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र बनाओ और नाप कर सिद्ध करो कि उसके सब अन्तःकोण और चार समकोण मिल कर उतने समकोणों के बराबर होते हैं जो गिनती में क्षेत्र की भुजाओं की संख्या से दूने हों।

इसको कंठाग्र कर लो।

मुख्य मुख्य त्रिभुजों का बनाना और तुलना करना

प्र० ६२—त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसका कोण अ ब स = ७५°, ब अ = २·७ इंच, ब स = १·६ इंच, अ स रेखा को और ब अ स और ब स अ कोणों को नापो। (उत्तर—अ स = २·८७ इंच, कोण ब अ स = ३६½°, और कोण ब स अ = ६५½°,) इस त्रिभुज के बनाने के लिए २·७ इंच लम्बी रेखा खींचो, इसके एक सिरे पर ७५° का कोण बनाती हुई सीधी रेखा खींचो और इस रेखा में से १·६ इंच के बराबर रेखा काट लो।

जब कभी दिये हुए परिमाणों के अनुसार कोई आकृति बनानी हो तो यह सदैव उत्तम होगा कि पहिले उस आकृति का खाका साधारणतः बना लो और उसमें दिये हुए परिमाण लिख लो।

प्र० ६३—नीचे लिखे हुए परिमाणों के त्रिभुज बनाओः—

(१) कोण अ ब स = ९०°, ब अ = १·२ इंच, ब स = १·२ इंच

(२) ,, ,, = ६०° ,, = १·५ इंच, ,, = १·५ इंच

(३) ,, ,, = २५° ,, = १·४ इंच, ,, = १·१ इंच

प्र०६४—एक त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसका कोण अ ब स = ६३°, ब अ = २·५ इंच और ब स = १·८ इंच; इन्हीं परिमाणों से एक त्रिभुज अ ब स और बनाओ और त्रिभुज की शेष भुजाओं और कोणों को नापो और सिद्ध करो कि दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ६५—प्रयोग ६४ के दोनों त्रिभुजों को काट कर एक दूसरे पर रख कर सिद्ध करो कि यह प्रत्येक दशा में आपस में बराबर हैं।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों और उन भुजाओं के बीच के कोण भी बराबर हों तो दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर होते हैं।

इसको कण्ठाग्र कर लो।

प्र० ६६—एक त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसकी ब स भुजा = ४.४ से. मी., कोण अ ब स = ६३°, और कोण अ स ब = ५४°, अ ब, अ स भुजाओं और ब अ स कोण को नापो (उत्तर— अ ब = ४ से. मी., अ स = ४. ४ से. मी. और कोण ब अ स = ६३°)

इस त्रिभुज के बनाने में पहिले ब स = ४. ४ से. मी. बना लो फिर ब और स पर के कोण क्रमशः ६३° और ५४° बनाओ।

प्र० ६७—नीचे लिखे परिमाणों से त्रिभुज बनाओ :—

(१) ब स = १.५ इंच—कोण अ ब स = ६०°—कोण अ स ब = ६०°

(२) ,, = १.२५ इंच— ,, = ९०°— ,, = ४५°

(३) ,, = ३.८ से. मी.— ,, = ३०°— ,, = ६०°

प्र० ६८—अ ब स त्रिभुज बनाओ जिसकी ब स भुजा = २.३ इंच, कोण अ ब स = २८° और कोण अ स ब = १३३°। एक और त्रिभुज अ ब स इन्हीं परिमाणों से बनाओ, दोनों त्रिभुजों की शेष भुजा और कोणों को नापो और सिद्ध करो कि दोनों प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ६९—प्रयोग ६८ के दोनों त्रिभुज को काट कर और एक दूसरे पर ठीक ठीक रख कर सिद्ध करो कि दोनों प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ७०—अ ब स त्रिभुज बनाओ जिसकी अ ब भुजा = १.२ इंच, कोण अ ब स = ६३° और कोण अ स ब = ७५° ब स, अ स भुजाओं और ब अ स कोण को नापो। (उत्तर—ब स = ०.८३ इंच, अ स = १.१ इंच और कोण ब अ स = ४२°)

चूँकि त्रिभुज के कोणों का योग बराबर दो समकोणों के होता है (देखो प्रयोग ५४) इसलिए हम जानते हैं कि अभीष्ट त्रिभुज अ ब स का स अ ब कोण = [१८०° —(६३° + ७५°)] अर्थात् ४२° इसलिए इस त्रिभुज को प्रयोग ६७ के त्रिभुजों की भाँति बना सकते हैं।

प्र० ७१—नीचे लिखे परिमाणों से त्रिभुज बनाओ :—

(१) ब स = १·४ इंच, ब स अ कोण = ३०° — ब अ स कोण = ६०°
(२) ,, = १.०५ इंच, ,, = ४५° — ,, = ९०°
(३) ,, = ३.६ से. मी., ,, = ४३° — ,, = ७२°

प्र० ७२—अ ब स त्रिभुज बनाओ जिसकी ब स भुजा = ३.२ से. मी., कोण ब स अ = ५७°, और कोण ब अ स = ७१°। एक और अ ब स त्रिभुज इन्हीं परिमाणों से बनाओ, दोनों त्रिभुजों के शेष भुजा और कोणों को नापो और उससे यह सिद्ध करो कि दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ७३—प्रयोग ७२ के त्रिभुजों को काट कर और एक दूसरे पर रख कर सिद्ध करो कि यह आपस में बराबर हैं।

६६ से ७३ तक के प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो त्रिभुजों में से, एक त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के अलग अलग बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की अपनी संगती भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर होते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

समद्विबाहु त्रिभुज

प्र० ७४—एक त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसकी अ ब और अ स भुजाओं में से हर एक १. ७ इंच हो अ ब स और अ स ब कोणों को नाप कर उनके परिमाणों की तुलना करो।

प्र० ७५—दो बराबर भुजाओं के छः त्रिभुज, भिन्न भिन्न प्रकार के बनाओ उनका समद्विबाहु त्रिभुज नाम रक्खो। प्रत्येक त्रिभुज के दोनों कोणों को जो बराबर भुजाओं के सामने स्थित हैं नाप कर तुलना करो और बताओ कि उनके सम्बन्ध में तुमको कौनसी नई बात ज्ञात हुई।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजा आपस में बराबर हों तो उनके सामने के कोण भी बराबर होंगे।

इसको कण्ठाग्र कर लो।

प्र० ७६—एक त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसके अ ब स और अ स ब कोणों में से प्रत्येक ६३° है और ब स की लम्बाई कितनी ही ले लो, अ ब और अ स को नापो और उनके परिमाणों की तुलना करो।

प्र० ७७—दो बराबर कोणों के छः त्रिभुज, भिन्न भिन्न प्रकार के बनाओ और इन बराबर कोणों के सामने की प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों की तुलना करो और बताओ कि तुमको इनके विषय में क्या बात ज्ञात होती है।

इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि किसी त्रिभुज के दो कोण आपस में बराबर हों तो उनके सामने की भुजाएँ भी बराबर होती हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

मुख्य मुख्य त्रिभुजों का बनाना और तुलना करना

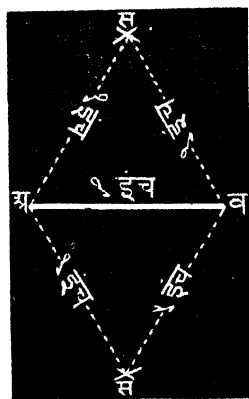
प्र० ७८—एक वृत्त अपने परकार से खींचो और देखो कि वृत्त की सीमा जिसको परिधि कहते हैं वृत्त के उस बिन्दु से जिसको केन्द्र कहते हैं बराबर दूरी पर है। इस दूरी को वृत्त का अर्द्धव्यास कहते हैं।

अपने परकार को सिरे पर से पकड़ो और सुई की नोक को धीरे से दबाओ ताकि कागज़ फट न जाय।

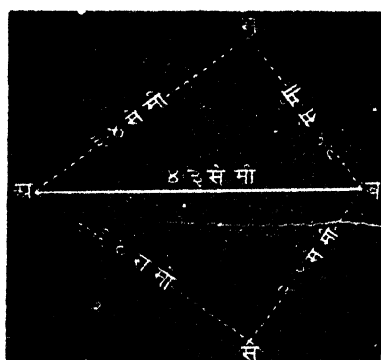
प्र० ७९—अपने परकार से निम्न लिखित अर्द्धव्यासों के वृत्त खींचो:— १ इंच, $\frac{३}{४}$ इंच, २ से. मी., १·८ से. मी., ०·६ इंच और २३ मि. मी., लम्बाइयों के लेने में पहिले अपने परकार को चौड़ा करके खोलो और फिर दी हुई लम्बाई तक धीरे धीरे टाँगों को दबाते हुए बंद किया करो।

प्र० ८०—अपने परकार से दिये हुए बिन्दु अ से १$\frac{१}{४}$ इंच की दूरी पर आधे दर्जन बिन्दु ज्ञात करो।

प्र० ८१—अ ब सीधी रेखा = १ इंच खींचो, बिन्दु स ऐसा ज्ञात करो जो अ और ब प्रत्येक से एक एक इंच की दूरी पर हो, सिद्ध करो कि स के ऐसे दो स्थान होंगे।

प्रकट है कि स का वह स्थान होगा जहाँ दो वृत्त एक दूसरे को काटते हों जो अ और ब केन्द्रों से १ इंच की दूरी पर खींचे गये हैं।

प्र० ८२—एक त्रिभुज बनाओ जिसकी प्रत्येक भुजा $\frac{९}{१०}$ इंच हो।

प्र० ८३—४·३ से. मी. लम्बी एक सीधी रेखा खींचो, अब एक स बिन्दु ऐसा ज्ञात करो जो अ से ३·४ से. मी. और ब से २·९ से. मी. के

अन्तर पर स्थित हो । सिद्ध करो कि स के ऐसे स्थान दो होंगे (देखो निम्न आकृति)

प्र० ८४—नीचे लिखे परिमाणों के त्रिभुज बनाओः—

(१) अ ब = १.२ इंच   ब स = १.२ इंच   अ स = १.२ इंच
(२) ,, = १.५ इंच   ,, = १.५ इंच   ,, = ०.८ इंच
(३) ,, = १.३ इंच   ,, = १.१ इंच   ,, = ०.६ इंच

प्र० ८५—अ ब स त्रिभुज के बनाने की चेष्टा करो। अ ब भुजा = ३.४ से. मी., ब स १.३ से. मी. और अ स १.८ से. मी. है। बताओ इसका बनाना क्यों असम्भव है।

इस प्रयोग से हम यह फल निकालते हैंः—

त्रिभुज की कोई सी दो भुजा मिल कर तीसरी से बड़ी होती हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

प्र० ८६—एक त्रिभुज अ ब स बनाओ जिसकी भुजा अ ब = ०.८५ इंच, ब स = १.७ इंच और अ स = १.६ इंच । एक दूसरा त्रिभुज इन्हीं परिमाणों से बनाओ, दोनों त्रिभुजों के कोणों को नापो और सिद्ध करो कि दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ८७—प्रयोग ८६ के दोनों त्रिभुजों को काट कर एक दूसरे पर रख कर सिद्ध करो कि आपस में बराबर हैं।

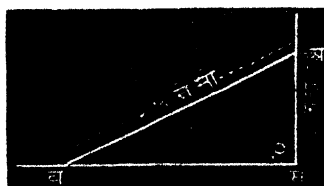
इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की तीनों भुजा दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अलग अलग बराबर हों तो दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर होते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

प्र० ८८—एक त्रिभुज बनाओ जिसका एक कोण समकोण हो, उसका समकोण त्रिभुज नाम रक्खो, और समकोण के सामने की भुजा को कर्ण कहो।

प्र० ८९—अ ब स एक समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कोण अ स ब समकोण हो और कर्ण अ ब = ३.४ से. मी. और अ स = १.५ से. मी. हो। भुजा ब स और कोण अ ब स और ब अ स को नापो। (उत्तर—ब स = ३·०५ से· मी·, कोण अ ब स = २६° और कोण ब अ स = ६४°)।

इसके बनाने में पहिले अ स ब समकोण को बनाओ और स अ = १.५ से. मी. नाप लो फिर अ को केन्द्र मान कर ३.४ से. मी. अर्द्ध व्यास की दूरी लेकर वृत्त का चाप बनाओ जो ब स रेखा को ब पर काटे (देखो निम्न आकृति)

प्र० ९०—इन परिमाणों से समकोण त्रिभुज बनाओ:—

(१) कर्ण अ ब = १.५ इंच अ स = .८ इंच
(२) ,, ,, = १.१५ इंच ,, = .७५ इंच

प्र० ९१—अ ब स समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कोण अ स ब समकोण हो, कर्ण अ ब = १.६ इंच, अ स = १.१ इंच। इन्हीं परिमाणों से एक और समकोण त्रिभुज अ ब स बनाओ, दोनों त्रिभुजों की शेष भुजा और कोणों को नापो और सिद्ध करो कि यह दोनों, प्रत्येक दशा में बराबर हैं।

प्र० ९२—प्रयोग ९१ के दोनों त्रिभुजों को काट कर और एक दूसरे पर रख कर सिद्ध करो कि यह दोनों आपस में बराबर हैं। इन प्रयोगों से हम यह फल निकालते हैं:—

यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्ण बराबर हों और उनकी एक एक भुजा भी बराबर हो तो दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर होते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

त्रिभुजों में असमानता

प्र० ९३—एक त्रिभुज बना कर उसकी दो भुजाओं को नापो; फिर उनके सामने के कोणों को नापो और एक चक्र में इन परिमाणों को लिखो। इससे तुमको ज्ञात होगा कि बड़ी भुजा के सामने बड़ा कोण और बड़े कोण के सामने बड़ी भुजा होती है।

प्र० ९४—भिन्न भिन्न प्रकार के छः त्रिभुज लेकर प्रयोग ९३ की आवृत्ति करो और इन फलों को जो तुम सदा निकालते रहे हो, कण्ठाग्र कर लोः—

(१) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजा ना बराबर हों तो बड़ी भुजा के सामने बड़ा कोण होता है।

(२)—यदि किसी त्रिभुज में दो कोण ना बराबर हों तो बड़े कोण के सामने बड़ी भुजा होती है।

प्र० ९५—ऐसे दो त्रिभुज बनाओ जिनमें से एक की दो भुजा, दूसरे की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों, किन्तु वह आपस में प्रत्येक दशा

में बराबर न हों। प्रत्येक त्रिभुज की तीसरी भुजा और बराबर भुजाओं के बीच के कोणों को नापो और एक चक्र में लिखो। तुमको इस चक्र से ज्ञात होगा कि उस त्रिभुज की तीसरी भुजा बड़ी है जिसका बीच का कोण बड़ा है, और जिसका बीच का कोण बड़ा है उसकी तीसरी भुजा बड़ी है।

प्र० ९६—त्रिभुजों के छः जोड़े लेकर प्रयोग ९५ की आवृत्ति करो और इन फलों को जिनको तुम सदा निकालते रहे हो कंठाग्र कर लोः—

(१) यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों; किन्तु इनके बीच के कोण ना बराबर हों तो जिस त्रिभुज का बीच का कोण बड़ा होगा उसकी तीसरी भुजा भी बड़ी होती है।

(२) यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों; किन्तु तीसरी भुजाएँ ना बराबर हों तो जिस त्रिभुज की तीसरी भुजा बड़ी होती है उसका बीच का कोण भी बड़ा होता है।

प्र० ९७—एक आकृति बनाकर और उसको नापकर इस नियम को स्पष्ट करो—

दी हुई सीधी रेखा पर दिये हुये बिन्दु से जो सीधी रेखा के बाहर है जितनी सीधी रेखा खींची जावेंगी उनमें लम्ब (सीधी खड़ी हुई रेखा) सबसे छोटा होता है।

इसको कंठाग्र कर लो।

समानान्तर चतुर्भुज

प्र० ९८—भिन्न भिन्न प्रकार के छः चतुर्भुज बनाओ, प्रत्येक आकृति की आमने सामने की भुजाएँ समानान्तर रक्खो; इनके **समानान्तर चतुर्भुज** नाम रक्खो।

जो सीधी रेखा सामने के कोणों को मिलाती हैं उनको कर्ण कहते हैं।

प्र० ९९—एक आकृति बनाकर और उसको नापकर इस नियम को स्पष्ट करो—

समानान्तर चतुर्भुजों की आमने सामने की भुजा और कोण आपस में बराबर होते हैं और कर्ण एक दूसरे के दो बराबर भाग करते हैं।

इसको कंठाग्र कर लो।

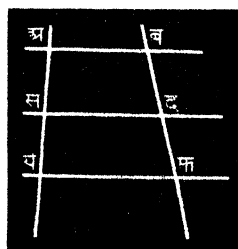
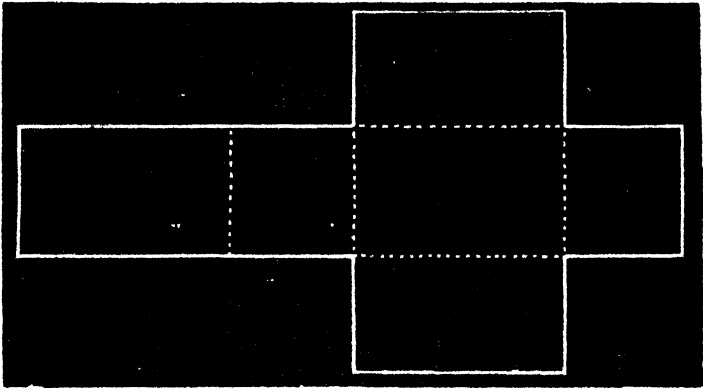
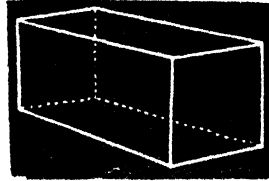
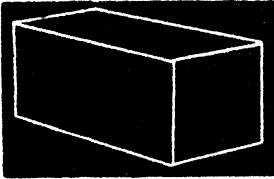
प्र० १००—एक आकृति बनाकर और उसको काटकर इस नियम को आच्छादन क्रिया द्वारा स्पष्ट करो—

समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण उसको दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

प्र० १०१—एक आकृति बनाकर और उसको नाप कर इस नियम को स्पष्ट करो—

यदि कोई सीधी रेखा तीन या अधिक समानान्तर सीधी रेखाओं को काटे और इस रेखा के अन्तः भाग जो समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हैं बराबर हों तो उनके संगती भाग जो किसी और काटनेवाली रेखा से बनते हों बराबर होंगे।

इसको कंठाग्र कर लो।

इस प्रयोग के लिए आकृति बनाने में पहिले अ, स और य बिन्दु किसी सीधी रेखा पर ऐसे कल्पना कर लो कि अ स=स य=इत्यादि इत्यादि। फिर अ, स, य इत्यादि इत्यादि से एक दूसरे की समानान्तर सीधी रेखा खींचो, इस प्रकार जो भाग उत्पन्न हों उनको नापो तो तुमको ज्ञात होगा कि ब द=द फ=इत्यादि इत्यादि हैं। और फिर एक और रेखा, समानान्तर सीधी रेखाओं को ब, द, फ इत्यादि इत्यादि पर काटती हुई खींचो, निम्न आकृति में अ स और स य, रेखा अ य के, और ब द और द फ, रेखा ब फ के ऐसे भाग हैं।

कुछ सरल पिण्ड

प्र० १०२—ऊपर की प्रत्येक आकृति से जो पिण्डात्मक आकृति बनती है उसको पिण्डात्मक **समानान्तर खात** कहते हैं, तीसरी आकृति की एक पतली दफ़्ती पर प्रति कर लो, इसमें अच्छी काग़ज़ व्यवहार करने में सरलता होगी, उस आकृति को जो वास्तविक आकृति की प्रति है अलग काट लो और बिन्दुदार रेखाओं पर से मोड़ कर और किनारों को गोंद लगे हुए काग़ज़ से जोड़ कर एक पिण्डात्मक समानान्तर खात की प्रतिमूर्ति बनाओ।

तीसरी आकृति को पिण्डात्मक समानान्तर खात का **जाल** कहते हैं।

प्र० १०३—एक पिण्डात्मक समानान्तर खात का जिसकी लम्बाई २·६ इंच, चौड़ाई १·६ इंच, गहराई १·४ इंच है पहिले जाल खींचो फिर उसकी प्रतिमूर्ति बनाओ।

प्र० १०४—एक पिण्डात्मक समानान्तर खात का जाल और प्रतिमूर्ति बनाओ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और गहराई में से प्रत्येक बराबर है और कल्पना कर लो कि इनमें से प्रत्येक २ इंच है। इसका नाम घन रक्खो।

प्र० १०५—किसी पिण्डात्मक समानान्तर खात में बताओ:—

(अ) पक्षों की संख्या,

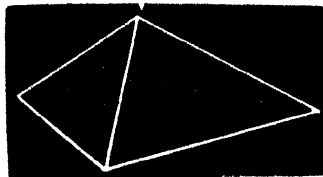
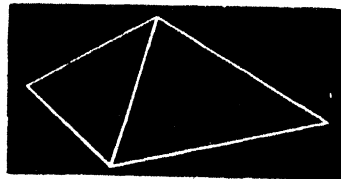
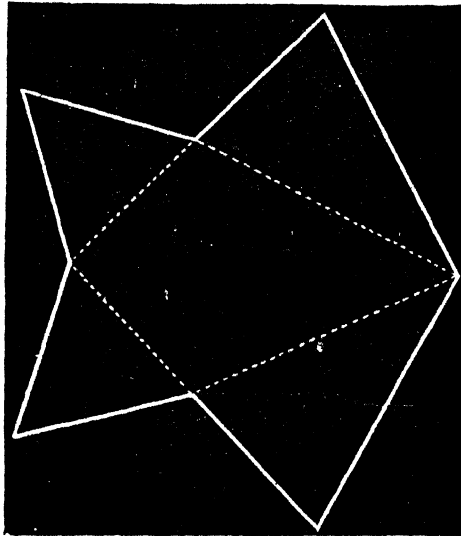
(ब) किनारों की संख्या,

(स) कोणों की संख्या,

(द) प्रत्येक पक्ष की आकृति,

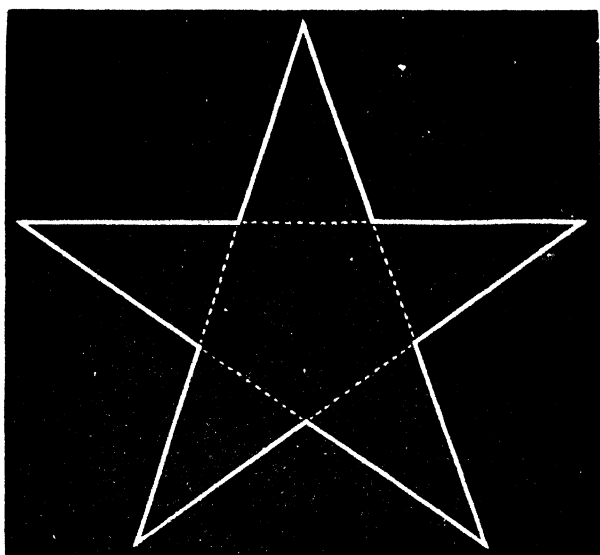
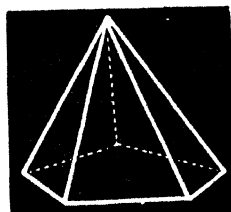
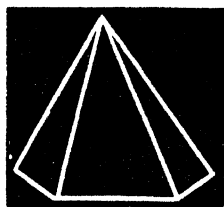
(य) किनारों की संख्या जो प्रत्येक कोण पर समाप्त होते हैं,

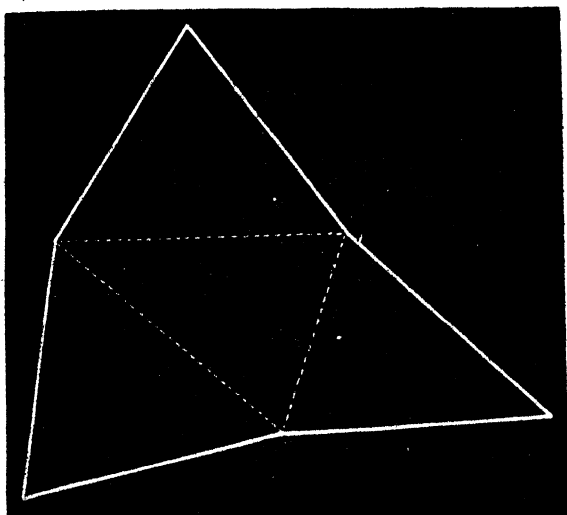
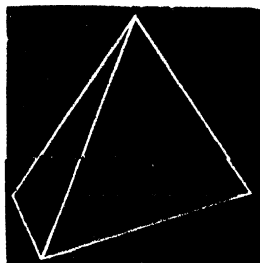
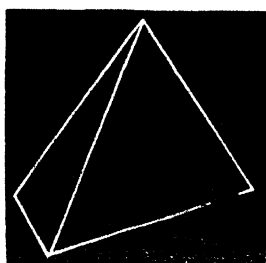
(फ) पक्षों की संख्या जो प्रत्येक कोण पर समाप्त होते हैं।

नीचे की प्रत्येक आकृति से जो पिंड प्रकट होता है उसको सूच्याकारशङ्कु कहते हैं।

यदि सूच्याकार शङ्कु का आधार (अर्थात् वह पक्ष जिस पर वह खड़ा होता है) ३, ४, ५ या ६ इत्यादि इत्यादि भुजाओं से घिरा हो तो उसको क्रम से सूच्याकार शंकात्मक त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज या षड्भुज इत्यादि इत्यादि के नाम से बोलते हैं।

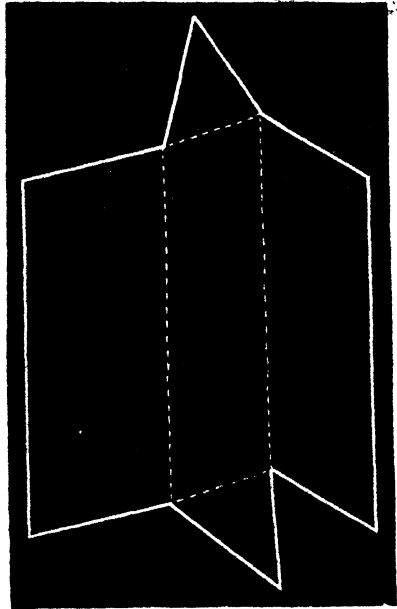
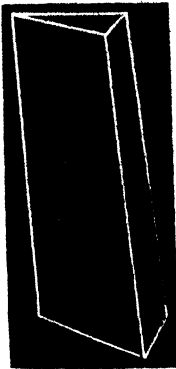
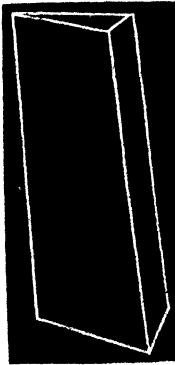
प्र० १०६—प्र० १०५ की तीसरी आकृति एक सूच्याकार शङ्कु का जाल है, इसकी प्रति एक दफ़्ती पर कर लो और जाल को अलग काट कर बिन्दुदार रेखाओं पर से मोड़ो और गोंद लगे हुए काग़ज़ से उसके किनारों को जोड़ कर पिण्ड की प्रतिमूर्ति बनाओ।

प्र० १०७—नीचे की तीसरी आकृति एक ऐसे सूच्याकार शङ्कु का जाल है जिसका आधार एक समान कोण समबहुभुज है (अर्थात् एक समान कोण सम भुजवाला बहुभुज क्षेत्र) और जिसके पक्षों के सम्पूर्ण किनारे आपस में

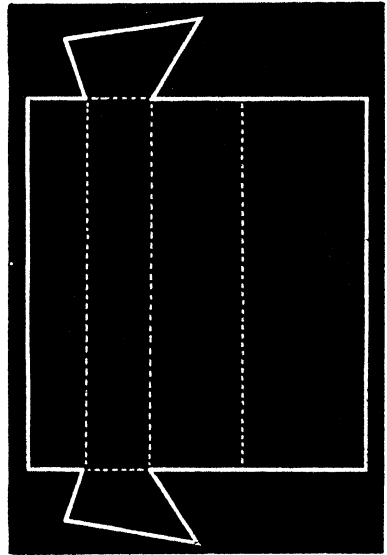
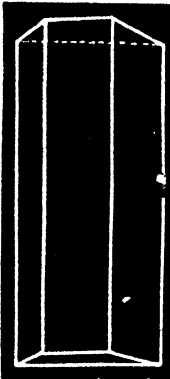
बराबर हैं। इसकी प्रति करो और पिण्ड की एक प्रतिमूर्ति बनाओ और इसका नाम सीधा समभुज सूच्याकार शङ्कु रक्खो।

प्र० १०८—नीचे की तीसरी आकृति एक सूच्याकार शङ्कु का जाल है जो एक त्रिभुजाकार आधार पर सीधा खड़ा है। इसकी प्रति करो और पिण्ड

की एक प्रतिमूर्ति बनाओ और इसका नाम **सूच्याकार शंकात्मक त्रिभुज** रक्खो ।

प्र० १०९—एक सूच्याकार शंकात्मक त्रिभुज का जाल और प्रतिमूर्ति बनाओ जिसके सम्पूर्ण किनारे आपस में बराबर रहें और इसका नाम **समभुज सूच्याकार शङ्कु** रक्खो ।

प्र० ११०—किसी सूच्याकार शंकात्मक समभुज त्रिभुज में बताओः—

(अ) पक्षों की संख्या,
(ब) किनारों की संख्या,
(स) कोणों की संख्या,
(द) प्रत्येक पक्ष की आकृति,
(य) किनारों की संख्या जो एक कोण पर समाप्त होते हैं,
(फ) पक्षों की संख्या जो एक कोण पर समाप्त होते हैं।

ऊपर की प्रत्येक आकृति से जो पिण्ड प्रकट किया गया है उसको हम त्रिपार्श्व कहेंगे।

त्रिपार्श्व का आधार यदि ३, ४, ५ या ६ भुजाओं से घिरा हो तो उसे त्रिपार्श्व त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज, या षड्भुज कहते हैं।

प्र० १११—प्र० ११० की तीसरी आकृति एक त्रिपार्श्व का जाल है, इसको अलग काट कर एक प्रतिमूर्ति बनाओ।

प्र० ११२—प्र० ११० की तीसरी आकृति एक ऐसे त्रिपार्श्व का जाल है जिसके प्रत्येक पक्ष के किनारे आधार पर सीधे खड़े हैं इसकी प्रति करो और पिण्ड की एक प्रतिमूर्ति बनाओ और इसका नाम सीधा त्रिपार्श्व रक्खो।

प्र० ११३—सीधे त्रिपार्श्व त्रिभुज या फलकीय खात का जाल और खाका बनाओ।

प्र० ११४—किसी सीधे त्रिपार्श्व त्रिभुज में बताओः—

(अ) पक्षों की संख्या,
(ब) किनारों की संख्या,
(स) कोणों की संख्या,
(द) सिरों के पक्षों की आकृति,
(य) पक्षों की आकृति,
(फ) किनारों की संख्या जो प्रत्येक कोण पर समाप्त होते हैं,
(ज) पक्षों की संख्या जो प्रत्येक कोण पर समाप्त होते हैं।

यह बात स्मरण रखने योग्य है कि यहाँ तक हमने भूमिति नियमों को सिद्ध नहीं किया है; केवल उनकी व्याख्या की है।

सूत्रात्मकप्रकरण

प्रस्तावना

किसी ठोस वस्तु, जैसे एक साधारण ईंट का विचार करो—इसमें लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई हैं। इन तीनों में से प्रत्येक को हम ईंट का **विस्तार** कहते हैं। अब सोचो यदि इन तीनों में से कोई, जैसे मोटाई ही कटते कटते, सम्पूर्ण जाती रहे और ईंट का पत्त ही बाक़ी रह जाय तो इस उदाहरण से **भौमितिक धरातल** का अर्थ कि धरातल में केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है और वह स्थान के एक भाग को परिमित करता है, भली भाँति समझ जाओगे। थोड़ा और सोचो, यदि इस ईंट के धरातल की चौड़ाई भी धीरे धीरे अदृष्ट हो जाय और उसका किनारा ही बाक़ी बचे तो **भौमितिक रेखा** का अर्थ कि उसमें केवल एक विस्तार अर्थात् लम्बाई ही होती है अथवा उसको किसी धरातल की सीमा भी कह सकते हैं, समझ जाओगे। अन्त में यह विचार करो कि यदि धीरे धीरे यह किनारा भी मिट जाय और एक कोण के अतिरिक्त ईंट का चिह्न भी बाक़ी न बचे तो इस उदाहरण से **भौमितिक बिन्दु** का अभिप्राय कि उसमें विस्तार नहीं होता और वह रेखा की सीमा अथवा सिरा भी कहलाता है, भली भाँति समझ जाओगे।

अब हम उन शब्दों की व्याख्या करते हैं जो भूमिति में प्रायः काम आया करते हैं।

परिभाषायें

प० १—बिन्दु वह है जिसका स्थान हो, परन्तु लम्बाई, चौड़ाई अथवा मोटाई न हो।

प० २—रेखा वह है जिसका स्थान और लम्बाई हो, परन्तु चौड़ाई अथवा मोटाई न हो।

रेखा के सिरे बिन्दु होते हैं।

यदि रेखा के सिरे नियत हों तो रेखा को **समाप्त** अथवा **परिमित** अन्यथा **असमाप्त** अथवा **अपरिमित** कहते हैं। जहाँ दो रेखा एक दूसरे को काटती हैं वहाँ एक अथवा अधिक बिन्दु होते हैं। इससे काग़ज़ पर बिन्दु प्रकट करने की सरल रीति ज्ञात होती है। जैसेः—

× न

न बिन्दु के प्रकट करने की रीति

· न

की अपेक्षा उत्तम जान पड़ती है।

चलते हुए बिन्दु का मार्ग (अथवा खोज) एक रेखा होती है।

रेखा के विस्तार को उसकी लम्बाई कहते हैं।

प० ३—**सीधी रेखा** वह है जो अपने सिरों के बिन्दुओं के बीच समस्थित हो। यह परिभाषा, पूर्णतया सन्तोषजनक नहीं हो सकती, क्योंकि शब्द "सीधे" के स्थान पर " सम " कह दिया गया है, परिभाषा के समझने के लिये कोई स्पष्टता नहीं उत्पन्न हुई। सच तो यह है कि सीधी रेखा का ध्यान ऐसा सरल है कि उसकी व्याख्या करके समझाना व्यर्थ है, किन्तु सीधी रेखाओं में जो कुछ गुण हैं, उनका कंठाग्र कर लेना आवश्यक है। वह यह हैंः—

(१) दो सीधी रेखा स्थान नहीं घेर सकतीं।

(२) यदि सीधी रेखा के किसी भाग के सिरे किसी दूसरे भाग पर डाले जायँ तो पहिला भाग चाहे किसी प्रकार रक्खा जाय, पूरा पूरा दूसरे भाग पर पड़ेगा।

(३) सीधी रेखा अपने सिरों के बिन्दुओं के बीच की कम से कम दूरी होती है।

यदि कोई रेखा, सीधी नहीं होती तो उसको वक्र कहते हैं।

प० ४—**धरातल** वह है जिसमें स्थान हो और लम्बाई, चौड़ाई हो, किन्तु मोटाई न हो।

धरातलों के किनारे रेखा होती हैं।

दो धरातलों का अन्तःखण्ड, रेखा अथवा रेखाएँ होती हैं।

चलती हुई रेखा का मार्ग (अथवा खोज) सामान्यतः एक धरातल होता है।

धरातल का विस्तार उसका **क्षेत्रफल** होता है।

प० ५—**दर्पणोदर धरातल** वह धरातल है कि यदि उसमें दो बिन्दु लिये जायँ तो उनको मिलानेवाली सीधी रेखा पूर्णतया उस धरातल में आजाय।

दो दर्पणोदर धरातलों का अन्तःखण्ड, सीधी रेखा होती है।

जो धरातल दर्पणोदर नहीं होता उसको **वक्र** कहते हैं।

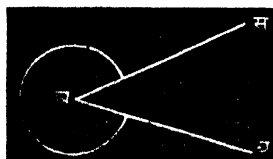
प० ६—**पिण्ड** वह है जिसका स्थान, लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई हो। पिण्डों की सीमा, धरातल होते हैं।

चलते हुए धरातल का मार्ग (अथवा खोज) सामान्यतः एक पिण्ड होता है।

विचार करो कि पिण्ड की परिभाषा में यह नहीं है कि वह किस वस्तु का बना हुआ है, इस लिये पानी का बुलबुला अथवा बादल वैसे ही पिण्ड समझे जाते हैं जैसे सीसे का डला; इसी लिए पिण्ड को आकाश का परिमित भाग भी कहते हैं।

पिण्ड के विस्तार को **घन फल** कहते हैं।

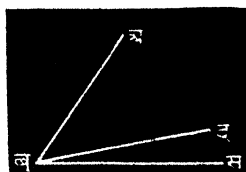
प० ७—जब दो सीधी रेखा एक बिन्दु पर मिलें तो उनके झुकाव को **सरल कोण** अथवा संक्षेप में **कोण** कहते हैं।

कोण का ध्यान चूंकि सरल है, इसलिए उसकी परिभाषा तो सन्तोषजनक नहीं हो सकती, किन्तु उसका ठीक ठीक आकार समझने के लिए हम उसको स्पष्ट कहते हैं।

कल्पना करो अ ब और अ स बिन्दु अ पर मिलती हैं। अब यदि कोई रेखा अ के चारों ओर अ ब के स्थान से अ स तक घूमे, तो इस घूमनेवाली

रेखा को कहेंगे कि यह उस कोण में होकर गई है जो अ ब और अ स से बनता है, और कोण का परिमाण उसी के घूमने के परिमाण पर पूर्णतया निर्भर है। कोई अ ब और अ स या चक्कर करनेवाली रेखा की लम्बाई पर नहीं है।

ध्यानपूर्वक सोचने से ज्ञात होगा कि घूमनेवाली रेखा केवल दो ओर घूम सकती है जैसा कि आकृति में हमने बाणों के सिरों से प्रकट किया है, इसलिए अ ब और अ स से दो भिन्न कोण बनते हैं, छोटे कोण को सब जानते ही हैं कि अ ब और अ स से बनता है; बड़े कोण को **पुनर्युक्त कोण** बोलते हैं।

जो कोण अ ब और अ स से बनता है उसको ब अ स अथवा स अ ब अथवा केवल अ कोण कहते हैं; जिस बिन्दु पर कोण बनानेवाली रेखा मिलती हैं उसको कोण का **शीर्ष** अथवा कोण का **बिन्दु** कहते हैं और स्वयं रेखाएं कोण की **भुजा** कहलाती हैं। जब कोण की भुजाएं एक ही सीधी रेखा में होती हैं तो उसको **सीधा कोण** कहते हैं।

जब एक ही शीर्ष के दो कोण, अपनी उभयनिष्ठ भुजा के सन्मुख भुज में स्थित हों तो उनको **आसन्न कोण** कहते हैं।

जैसे अ ब द और द ब स आसन्न कोण हैं।

चूंकि अ ब द और द ब स कोणों से मिल कर अ ब स कोण बना है, इसलिए अ ब द और द ब स का यह योग है और कोण द ब स, अ ब स और अ ब द का अन्तर है।

प० ९—दर्पणोदर आकृति किसी दर्पणोदर धरातल का वह भाग है जो एक वा अधिक रेखाओं से घिरा हुआ हो।

जब दर्पणोदर आकृति, सीधी रेखाओं से घिरी होती है तो उसको **सरल दर्पणोदर आकृति** और रेखाओं को **भुजाएँ** कहते हैं।

सरल रेखात्मक दर्पणोदर आकृति को :—

जब उसकी सम्पूर्ण भुजाएं बराबर हों तो **समभुजीय**,

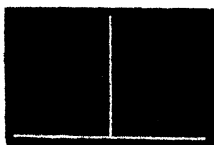
जब उसके सम्पूर्ण कोण बराबर हों तो **समकौणिक**,

जब वह समभुजीय और सम कौणिक दोनों हों तो **समानकोण समभुज** कहते हैं।

दर्पणोदर आकृति की सीमाओं के योग को **घेरा** कहते हैं।

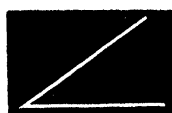
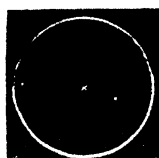
आकृति शब्द का बिन्दुओं, रेखाओं, धरातलों और उनके योग पर भी व्यवहार करते हैं।

इस पुस्तक में हम केवल उन आकृतियों पर अपना ध्यान रक्खेंगे जो दर्पणोदर धरातल पर बनती हैं। भूमिति-विद्या में यह भाग **भौमितिक दर्पणोदर धरातल** भाग कहलाता है।

प० १०—जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी होकर आसन्न कोण बराबर बनावे तो उन कोणों में से प्रत्येक को **समकोण** और खड़ी सीधी रेखा को दूसरी सीधी रेखा पर **लम्ब** कहते हैं।

यदि कोई रेखा अपने सिरे के चारों ओर घूमे और चौथाई चक्कर करके ठहर जाय तो कहेंगे कि यह समकोण में होकर गई है।

समकोण के $\frac{१}{९०}$ को **अंश** कहते हैं (१° लिखा जाता है) और अंश के $\frac{१}{६०}$ को **कला** कहते हैं (१′ लिखी जाती है) और कला के $\frac{१}{६०}$ को **विकला** कहते हैं (१″ लिखी जाती है)

प० ११—अधिक कोण वह कोण है जो एक समकोण से बड़ा और दो समकोणों से छोटा हो।

प० १२—न्यून कोण वह कोण है जो समकोण से छोटा हो।

प० १३—वृत्त वह दर्पणोदर क्षेत्र है जो एक सीधी रेखा से जिसका नाम परिधि है घिरा हो और उसके अन्दर एक विशेष बिन्दु ऐसा हो कि जितनी सीधी रेखाएँ इस बिन्दु से परिधि तक खींची जावें वह सब आपस में बराबर हों। इस बिन्दु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं।

भूमिति में "वृत्त" से कभी तो सम्पूर्ण क्षेत्र और कभी केवल परिधि से तात्पर्य लिया जाता है।

प० १४—कोई सीधी रेखा जो वृत्त के केन्द्र से परिधि तक खींची जावे तो वह अर्द्धव्यास कहलाती है।

और कोई सीधी रेखा जो वृत्त के केन्द्र पर से जाय और जिसके दोनों सिरे परिधि पर हों तो वह वृत्त का **व्यास** कहलाती है।

इसलिये एक ही वृत्त में व्यास, अर्द्ध-व्यास का दूना होता है।

यदि दो वृत्तों में एक वृत्त के अर्द्ध-व्यास दूसरे वृत्त के अर्द्ध-व्यासों के बराबर हों तो दोनों वृत्त आपस में बराबर समझे जाते हैं।

प० १५—किसी परिमाण को **समद्विभाग करने वाला** वह है जो उसको दो बराबर भागों में और **समत्रिभाग करनेवाला** वह है जो उसको तीन बराबर भागों में विभाजित करदे।

यह प्रकट है कि परिमित सीधी रेखा में, अर्द्धक बिन्दु केवल एक हो सकता है और एक ही रेखा से, दिये हुए सरल कोण के समद्विभाग हो सकते हैं।

अवाध्योपक्रम का वर्णन

भौमितिक तत्त्व, आकृतियों के द्वारा सिद्ध किये गये हैं, इन आकृतियों के बनाने के लिए कुछ सरल क्रियाएँ माननी पड़ती हैं, किन्तु जितनी कम मानें उतना ही उत्तम होता है, और वह ऐसी स्पष्ट और सरल हों जिनके सिद्ध करने की आवश्यकता न हो। हम ऐसी तीन क्रियाएँ मानेंगे और उनको अवाध्योपक्रम कहेंगे। वे यह हैं :—

अवाध्योपक्रम

कल्पना कर लो कि :—

१—किसी एक बिन्दु से, किसी दूसरे बिन्दु तक सीधी रेखा खींच सकते हैं।

२—एक परिमित सीधी रेखा को उसकी सीध में जहाँ तक चाहें बढ़ा सकते हैं।

३—किसी केन्द्र से और किसी परिमित सीधी रेखा के बराबर अर्द्ध व्यास लेकर वृत्त खींच सकते हैं।

सत्य तो यह है कि अबाध्येापक्रम हमको पटरी अथवा किसी वस्तु का सीधा किनारा और परकार व्यवहार करने की आज्ञा देते हैं और सीधी रेखाएँ और वृत्त जो इन वस्तुओं के द्वारा हम खींचेंगे वह पारिभाषिक दृष्टि से सन्तोषजनक समझे जावेंगे, जब कि वास्तव में हम भली भाँति जानते हैं कि कितनी ही सावधानी से उनको हम खींचें वह पूर्णतया शुद्ध नहीं आ सकते हैं, तो भी कोई कारण नहीं है कि अपने काम के लिए हम उनको शुद्ध न मानें।

विचारो कि अबाध्येापक्रम रेखाओं की लम्बाइयों की तुलना करने के लिए पटरी के व्यवहार करने की आज्ञा नहीं देते हैं, वरन केवल रेखाओं की लम्बाइयों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाने के लिए परकार व्यवहार करने की आज्ञा देते हैं, अबाध्येापक्रम २ और ३ से हम निम्न लिखित सरल क्रियाओं की कल्पना कर सकते हैं :—

(अ) एक दिये हुए बिन्दु से दी हुई सीधी रेखा के बराबर एक सीधी रेखा खींच सकते हैं।

(ब) दो दी हुई सीधी रेखाओं में छोटी के बराबर बड़ी रेखा में से भाग काट सकते हैं।

स्वयंसिद्धियों का वर्णन

चूंकि सिद्ध करने के लिए आवश्यक है कि हम यह दिखलावें कि विवादाधीन विषय, अन्य सिद्ध अथवा स्वयं प्रमाणविषय या विषयों पर निर्भर है या उनसे निकलता है; इसलिए स्पष्ट है कि आकृतियों की तर्कनाओं तक पहुँचने के प्रथम, हमको कुछ सरल और स्वयं प्रमाण तत्त्वों को मान लेना चाहिए; वह जहाँ तक हो सके कम हों और अपनी शुद्धता के लिए किसी अन्य और सरल तर्कनाओं के आश्रित भी न हों अथवा इस प्रकार कहो कि उनका सिद्ध करना असम्भव हो। इन स्वयं प्रमाण तत्त्वों को **स्वयं सिद्धि** कहते हैं। सम्पूर्ण भूमिति विद्या की यही जड़ हैं और इस विद्या के सम्पूर्ण नियम, इन्हीं से ऐसी तर्कनाओं से निकाले गये हैं जिनको **परामर्शीय तर्कना** कहते हैं।

हम स्वयं सिद्धियों को दो भेदों में विभक्त करेंगे :—

(अ) साधारण स्वयंसिद्धि जो सब प्रकार के परिमाणों पर घटित होती हैं।

(ब) भौमितिक स्वयंसिद्धि जो केवल भूमिति के परिमाणों पर घटित होती हैं।

साधारण स्वयंसिद्धि

स्व० १—जो चीज़ें एक ही चीज़ के बराबर हों, वह आपस में भी बराबर होती हैं।

स्व० २—यदि बराबर चीज़ों में बराबर बराबर जोड़ा जावे तो योग बराबर होंगे।

इसका एक विशेष उदाहरण यह है कि एक ही चीज़ के दूने आपस में बराबर होते हैं।

स्व० ३—यदि बराबर चीज़ों में से बराबर बराबर निकाल लिया जावे तो बाक़ी बराबर होंगी।

स्व० ४—यदि नाबराबर चीज़ों में, बराबर बराबर जोड़ा जावे तो योग नाबराबर होंगे।

स्व० ५—यदि नाबराबर चीज़ों में से बराबर बराबर निकाल लें तो बाक़ी नाबराबर रहेंगी।

स्व० ६—एक ही चीज़ के आधे बराबर होते हैं।

स्व० ७—सम्पूर्ण अपने टुकड़ों के योग के बराबर होता है।

इसलिये सम्पूर्ण अपने टुकड़े से बड़ा होता है।

भौमिति स्वयंसिद्धि

स्व० ८—किसी परिमाण को एक स्थान से दूसरे स्थान पर बिना आकृति अथवा डीलडौल बदले ले जा सकते हैं।

स्व० ९—जो परिमाण एक दूसरे को ढक लेते हैं अथवा एक ही स्थान घेरते हैं, वह आपस में बराबर होते हैं।

सोचो कि केवल यही नहीं कि परिमाण बराबर स्थानों को ढकें वरन् उनको मुख्यतः उसी स्थान को भी ढकना चाहिए।

तुलना करने के लिए एक परिमाण को दूसरे परिमाण पर ढकने को आच्छादन-क्रिया कहते हैं।

स्व० १०—दो सीधी रेखा, धरातल को नहीं घेर सकतीं।

स्व० ११—सब समकोण आपस में बराबर होते हैं।

स्व० १२—देखो पृष्ठ (६४)

साध्यों का वर्णन

अब हम उन भिन्न भिन्न वादानुवाद की शृंखलाओं के सोचने के लिए प्रस्तुत हैं जिनको **साध्य** कहते हैं और जिनका सम्बन्ध उन परिभाषाओं से है जिनको हम नियत कर चुके हैं और जो उन अवाध्योपक्रम और स्वयंसिद्धि के नियमों से आबद्ध हैं जिनको हमने माना है। यह साध्ये दो प्रकार की हैं—**प्रमेयोपपाद्य और वस्तूपपाद्य।**

प्रमेयोपपाद्य वह साध्य है जिसमें भूमिति का कोई आवश्यक सिद्धान्त सिद्ध करना होता है, जैसे :—

"यदि दो सीधी रेखा एक दूसरी को काटें तो सन्मुख-कोण आपस में बराबर होंगे।"

वस्तूपपाद्य वह साध्य है जिसमें भूमिति-सम्बन्धी कोई बनावट हो, जैसे :—

"एक दी हुई परिमित सीधी रेखा के समद्विभाग करो"।

स्मरण रक्खो कि प्रमेयोपपाद्य साध्य में कुछ सिद्ध करना होता है और वस्तूपपाद्य में कुछ बनावट होती है; इसलिए प्रत्येक साध्य की साधारण प्रतिज्ञा में दो भाग होते हैं। प्रमेयोपपाद्य साध्य में जो नियम कि मान लिये

गये हैं, उनको कल्पित अर्थ और जो बात सिद्ध करनी है उसको फल कहते हैं। जैसे इस प्रतिज्ञा में "यदि दो सीधी रेखा एक दूसरे को काटें तो सन्मुख कोण आपस में बराबर होंगे" निम्न लिखित विवरण के अनुसार कल्पित अर्थ और फल होंगे।

कल्पित अर्थ—यह मान लिया गया है कि दो रेखा, एक दूसरी को काटती हैं।

फल - यह सिद्ध करना है कि सन्मुख कोण आपस में बराबर होते हैं।

वस्तूपपाद्य साध्य में जो बातें बताई गई हैं उनको निर्दिष्ट और जो बनानी होती हैं उनको करणीय बोलते हैं। जैसे इस प्रतिज्ञा में "एक दी हुई परिमित सीधी रेखा के समद्विभाग करो" निम्न लिखित विवरण के अनुसार निर्दिष्ट और करणीय होंगे:—

निर्दिष्ट—एक दी हुई परिमित सीधी रेखा है।

करणीय—उसके समद्विभाग करना है।

प्रत्येक साध्य के चार भाग होते हैं:—

१—साधारण प्रतिज्ञा—जो प्रमेयोपपाद्य या वस्तूपपाद्य साध्य की अवस्थाओं को सामान्यतः प्रकट करती है।

२—मुख्य प्रतिज्ञा—जो साधारण प्रतिज्ञा को विशेष नियमों में प्रकट करती है और उसका सम्बन्ध किसी विशेष आकृति से देती है।

३—बनावट—जिसमें ऐसी रेखाएँ, अबाध्योपक्रम की आज्ञा से खींची जाती हैं, जिनका खींचना साध्य के सिद्ध करने के लिए आवश्यक समझा जाता है।

४—उपपत्ति - जिसमें आकृति खींच कर दिखाना होता है कि प्रमेयोपपाद्य का वर्णन शुद्ध है अथवा वस्तूपपाद्य की बनावट सम्भव है।

वस्तूपपाद्य साध्यों का वर्णन हम क्रियात्मक भूमिति में करेंगे जिसका कि उनसे सम्बन्ध है।

चिन्ह

$+$	धन के लिए
$-$	ऋण ,,
$<$	कोण ,,
$=$	इसके बराबर है—या इनके बराबर हैं—या इसके बराबर—या बराबर
$\perp$	लम्ब के लिए
$\parallel$	समानान्तर ,,
$\triangle$	त्रिभुज ,,
$\equiv$	प्रत्येक दशा में बराबर है—या प्रत्येक दशा में बराबर
$\odot$	वृत्त के लिए
$\because$	चूँकि ,,
$\therefore$	इसलिए ,,
$\square$	समानान्तर चतुर्भुज

संकेत

साध्य = सा०

प्रमेयोपपाद्य साध्य = प्र० सा०

अध्याय = अ०

वस्तूपपाद्य साध्य = व० सा०

अनुमान = अनु०

रेखागणित = रे०

प्रमेयोपपाद्य साध्यों का वर्णन

नीचे की प्रमेयोपपाद्य साध्यों के सिद्ध करने में हम कुछ बनावटें और मानेंगे, यद्यपि उनका वर्णन अवाध्योपक्रम में नहीं किया गया है। वह कल्पित बनावटें यह हैं:—

(अ) किसी रेखा या कोण को जितने बराबर भागों में चाहें बाँट सकते हैं।

(ब) किसी बिन्दु से किसी ओर और कितनी ही लम्बाई की रेखा खींच सकते हैं।

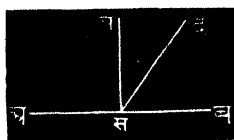
(स) किसी आकृति को किसी दशा में दुबारा बना सकते हैं या रख सकते हैं।

सम्भव है कि इन बनावटों के ठीक करने का ढंग हम न जानते हों फिर भी हम सरलता से कल्पना कर सकते हैं कि वह बनावटें ठीक हैं।

बिन्दु पर के कोण

साध्य १—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० १३ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी हो तो जो कोण इस प्रकार पैदा होते हैं उनका योग दो समकोणों के बराबर होगा।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो द स सीधी रेखा अ ब सीधी रेखा पर इस प्रकार खड़ी होकर दो <ब स द और द स अ बनाती है।

तो सिद्ध करना है कि

<ब स द + <द स अ = २ समकोणों के

बनावट—कल्पना कर लो कि स य, अ ब पर ⊥ डाला गया है

उपपत्ति—<ब स द + <द स अ = <ब स द + <द स य + <य स अ = <ब स य + <य स अ

= २ समकोणों के

यही सिद्ध करना था।

प० १६—जब दो कोण मिल कर बराबर दो समकोणों के होते हैं तो उनमें से प्रत्येक को दूसरे का पूरक कोण कहते हैं और दोनों कोणों को परिपूरक कोण कहते हैं।

जैसे ऊपर की आकृति में कोण अ स द पूरक द स ब कोण का है।

प० १७ - जब दो कोण मिल कर एक समकोण के बराबर होते हैं तो इनमें से प्रत्येक को दूसरे का कोटिकोण कहते हैं, और दोनों कोण अनुपूरक कोण कहलाते हैं।

जैसे ऊपर की आकृति में ब स द, कोटिकोण द स य का है।

प० १८—अनुमान भूमिति की वह शुद्धता है जो किसी सिद्ध की हुई साध्य से सरलता के साथ निकल सके।

अब हम नीचे कुछ अनुमान और अभ्यास जो साध्य १ प्रमेयोपपाद्य से सम्बन्ध रखते हैं, विद्यार्थी के सिद्ध करने के लिए देते हैं:—

अनु० १—यदि दो सीधी रेखायें एक दूसरे को काटें तो कटानबिन्दु पर के चारों कोण मिल कर चार समकोणों के बराबर होंगे।

अनु० २—कितनी ही सीधी रेखायें किसी बिन्दु पर मिलें, वह सम्पूर्ण कोण जो उनसे पैदा होते हैं यदि क्रम से लिये जावें तो सब मिल कर चार समकोणों के बराबर होंगे।

अभ्यास

१—निम्न लिखित < में से प्रत्येक का कोटिकोण क्या होगा ?

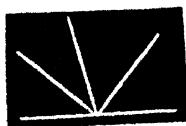
(१) १७° —(उ०—७३°)

(२) २६° —१३′—(उ०—६०°—४७′)

२—निम्न लिखित < में से प्रत्येक का पूरककोण क्या होगा ?

(१) ७३° —(उ० —१०७°)

(२) ३५° —५७′—(उ०—१४४°—३′)

३ - यदि किसी सीधी रेखा के एक ही बिन्दु पर कुछ सीधी रेखायें खड़ी हों तो जो < इस प्रकार पैदा होंगे वह लगातार जोड़ने से दो समकोणों के बराबर होंगे। (देखो निम्न आकृति)

४—न्यून कोण का पूरककोण, अधिक कोण होता है।

५—एक ही < के कोटिकोण आपस में बराबर होते हैं।

६—एक ही < के पूरककोण आपस में बराबर होते हैं।

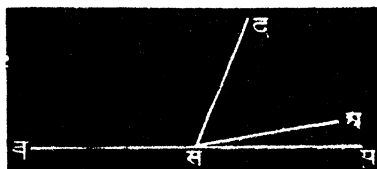
७—एक पहिये में १२ लकड़ियां लगी हुई हैं, बताओ कि पास की दो लकड़ियों के बीच का < कितना होगा ? (उ० ३०°)

८—उन चार <में जो सीधी रेखाओं के कटने से पैदा होते हैं यदि एक कोण समकोण हो तो सब कोण समकोण होंगे।

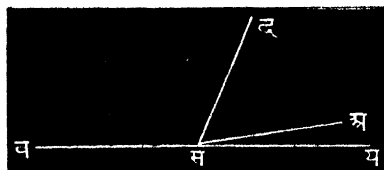
९—यदि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी हो तो उन दो <की अर्द्धक रेखायें जो इस प्रकार पैदा होती हैं एक दूसरे पर ⊥ होंगी।

साध्य २—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० १४ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी सीधी रेखा के एक बिन्दु पर दो और सीधी रेखायें आमने सामने की दिशाओं से आकर आसन्न कोण बराबर दो समकोणों के बनावें तो यह दोनों सीधी रेखायें एक सीधी रेखा में होंगी।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि स द सीधी रेखा के स बिन्दु पर दो सीधी रेखा स अ और स ब आमने सामने की दिशाओं से आकर आसन्न कोण द स अ और द स ब मिल कर = दो समकोणों के बनावें।

तो यह सिद्ध करना है कि

स अ और स ब एक ही सीधी रेखा में होंगी

बनावट—ब स को य तक बढ़ाओ।

उपपत्ति—∵ य स ब सीधी रेखा पर द स रेखा खड़ी है।

∴ <द स य + <द स ब = दो समकोणों के (सा० १–प्र०)

किन्तु <द स अ + <द स ब = दो समकोणों के (कल्पना)

∵ <द स य + <द स ब = <द स अ + <द स ब

∴ <द स य = <द स अ

∵ स अ, स य को ढक लेती है

∴ स अ और स ब एक ही सीधी रेखा में हैं।

यही सिद्ध करना था।

प० १९—एक प्रमेयोपपाद्य साध्य दूसरी साध्य का विलोम कहलाती है जब उनमें से किसी एक का कल्पित अर्थ दूसरे का फल हो। यह परिभाषा साध्य १ और २ प्रमेयोपपाद्य पर ठीक लग जाती है क्योंकि हम साध्य १ में तो कल्पना करते हैं कि दो रेखा एक दूसरी से मिलती हैं और सिद्ध करते हैं कि इन रेखाओं से बने हुए आसन्न कोण बराबर दो समकोणों के हैं। और साध्य २ में दो आसन्न कोणे बराबर दो समकोणों के मानते हैं और सिद्ध करते हैं कि यह कोणे दो सीधी रेखाओं के मिलने से बने हैं।

यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक प्रमेयोपपाद्य साध्य का विलोम भी ठीक हो जब कि स्वयं साध्य ही ठीक है। जैसे यह प्रतिज्ञा—

"यदि कोई मनुष्य हब्शी हो तो उसका शरीर काला होगा"

ठीक है, किन्तु इसका विलोम,

"यदि किसी मनुष्य का शरीर काला हो तो वह हब्शी होगा"।

स्पष्ट है कि ठीक नहीं है।

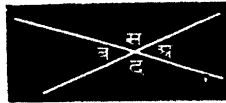
किसी प्रमेयोपपाद्य साध्य का विलोम जिसके कल्पित अर्थ में कई कल्पित अर्थ और फल में कई फल हों इस प्रकार ज्ञात हो सकता है कि उसके किसी एक फल और किसी एक कल्पित अर्थ को आपस में अदल बदल दिया जाय।

अधिक व्याख्या के लिए साध्य १४—प्रमेयोपपाद्य का टिप्पण देखो।

अभ्यास

१—म अ, म ब, म स और म द बिन्दु म पर मिलती हैं और < अ म ब, ब म स, स म द और द म अ में से प्रत्येक समकोण है, सिद्ध करो कि रेखा म अ उसी सीधी रेखा में है जिसमें म स है एवं म ब और म द एक ही सीधी रेखा में हैं।

२—म अ, म ब, म स और म द बिन्दु म पर मिलती हैं < अ म ब + < ब म स = < स म द + < द म अ। सिद्ध करो कि म स उसी सीधी रेखा में है जिसमें म अ है।

प० २०—चारों कोणों में से जो दो सीधी रेखाओं के कटने से बनते हैं आमने सामने के कोणों को **सन्मुख कोण** कहते हैं।

जैसे उक्त आकृति में अ और ब एवं स और द सन्मुख कोण हैं।

साध्य ३-प्रमेयोपपाद्य

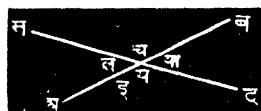
(रे०-सा० १५ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो सीधी रेखाएँ एक दूसरी को काटें तो सन्मुख कोण बराबर होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि दो सीधी रेखा अ ब और स द एक दूसरे को य बिन्दु पर काट कर च, क, इ, ल कोण बनाती हैं,

यह सिद्ध करना है कि—

<च = इ सन्मुख कोण के

और <क = ल सन्मुख कोण के

उपपत्ति— ∵ ब य रेखा स द रेखा पर खड़ी है

∴ <च + <क = दो समकोणों के (सा० १—प्र०)

फिर ∵ द य रेखा अ ब रेखा पर खड़ी है

∴ <क + <इ = दो समकोणों के (सा० १—प्र०)

∵ <च + <क = <क + <इ

∴ <च = <इ

इसी प्रकार <क = <ल

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—ऊपर की आकृति में सिद्ध करो कि <ब य स = <अ य द।

२—म अ और म ब बिन्दु म पर मिलती हैं, म स और म द बिन्दु म से म अ और म ब पर क्रम से ⊥ खींचे गये हैं, सिद्ध करो कि <स म द <अ म ब का या तो पूरक कोण है या बराबर है।

३—दो आसन्न कोण परिपूरक हैं बताओ कि इनकी अर्द्धकों से बने हुए कोण में कितने अंश होंगे ? (उ०—९०°)

४—सन्मुख कोणों की अर्द्धक, एक ही सीधी रेखा में होती हैं।

समानान्तर सीधी रेखायें

प० २१—एक ही धरातल पर की सीधी रेखायें जो लगातार दोनों ओर बढ़ाई जाने से नहीं मिलतीं समानान्तर कहलाती हैं।

टिप्पणी—यदि एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं को काटे तो कटान के दोनों बिन्दुओं पर आठ कोण पैदा होंगे जैसा कि नीचे की आकृति से प्रकट है। इनमें से

च, क, ज, ग बहिःकोण कहलाते हैं।

ल, इ, न, म अन्तःकोण कहलाते हैं।

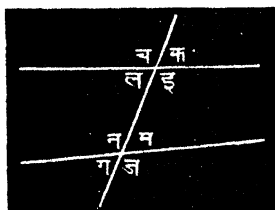
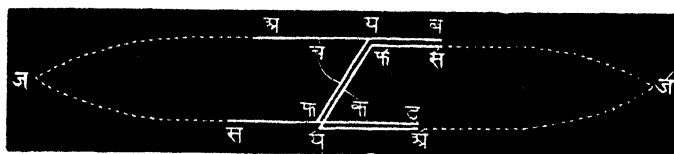
इ, न, और ल, म एकान्तरकोण कहलाते हैं।

च—न, क—म, ग—ल, ज—इ संगतीकोण कहलाते हैं।

और काटनेवाली रेखा को तिर्यक रेखा कहते हैं।

——

साध्य ४—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २७ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं को काटे और दोनों एकान्तर कोण बराबर हों तो दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि सीधी रेखा य फ दो और सीधी रेखाओं अ ब और स द को य और फ पर काटती है और एकान्तर कोण च = एकान्तर कोण क के बनाती है,

यह सिद्ध करना है कि

अ ब ॥ स द की होगी।

बनावट—यदि अ ब और स द ॥ नहीं हैं तो बढ़ाये जाने से एक ओर या दूसरी ओर मिल जावेंगी।

कल्पना करो कि वह अ और स की ओर बढ़ाने से ज विन्दु पर मिलती हैं,

अब मान लो कि आकृति ज अ य फ स की ज′ अ′ य′ फ′ स′ प्रति एक अक्सी काग़ज़ पर उतार कर एवं उसी धरातल में पलट कर इस प्रकार रक्खी गई है कि रेखा य′ फ′ रेखा फ य को ढकती है।

उपपत्ति— ∵ ∠अ′ य′ फ′ = ∠अ य फ = ∠च

= ∠क (कल्पना)

∴ य′ अ′ रेखा, फ द रेखा पर पड़ेगी

और ∵ ∠य′ फ′ स′ = ∠य फ स

= पूरक ∠क (सा० १—प्र०)

= पूरक ∠च (कल्पना)

= ∠फ य ब (सा० १—प्र०)

∴ फ′ स′, रेखा य ब पर पड़ेगी

इसलिए रेखा य ब और फ द यदि ब और द की ओर बढ़ाई जायँ तो बिन्दु ज' पर मिलेंगी।

किन्तु ऐसा होने से दो सीधी रेखा एक धरातल को घेरेंगी, जो हम जानते हैं कि असम्भव है।

∴ अ ब, स द रेखा बढ़ाई जाने से दोनों ओर नहीं मिल सकतीं

∴ अ ब ॥ स द की है।

यही सिद्ध करना था।

असगति प्रदर्शन का वर्णन

कभी कभी किसी बात को सत्य सिद्ध करने की अपेक्षा उसका असत्य न होना सिद्ध करना, अधिक सुगम होता है। और वास्तव में इन दोनों फलों में कोई अन्तर नहीं है। जैसे यदि हम यह सिद्ध कर दें कि दो सीधी रेखा ना बराबर नहीं हैं तो मानो हमने यह सिद्ध कर दिया कि वह बराबर हैं। भूमिति में बहुतेरे अवसरों पर विषय की सत्यता को इस प्रकार चक्कर देकर सिद्ध किया है जिसको असंगतिप्रदर्शन (अर्थात् अयुक्त ठहराना) कहते हैं। इसका यह तात्पर्य है कि यदि वह विषय जिसकी सत्यता हम सिद्ध करना चाहते हैं अशुद्ध मान लिया जावेगा तो असम्भव फल पैदा होंगे। जैसा कि हम बता चुके हैं कि असंगति प्रदर्शन से सिद्ध करने का ढंग चूँकि केवल यह बतलाता है कि विवादसम्बन्धी विषय ठीक है और यह नहीं बताता कि क्यों ठीक है, इसलिए अन्वययुक्त साधन से वह न्यून श्रेणी का समझा जाता है।

असंगति प्रदर्शन का ढंग साध्य ४—प्रमेयोपपाद्य की उपपत्ति में और अधिकतर दूसरी प्रमेयोपपाद्य साध्यों के विलोम की उपपत्ति में व्यवहार में आया है॥

अभ्यास

१—यदि किसी आकृति के जो चार रेखाओं से घिरी हो सम्पूर्ण कोण समकोण हों तो सिद्ध करो कि आमने सामने की भुजाएँ ॥ होंगी।

२—यदि दो सीधी रेखा एक ही रेखा पर ⊥ हों तो वह आपस में समानान्तर होंगी।

३—ऊपर की आकृति में दोनों एकान्तर कोणों की अर्द्धक रेखाएँ ॥ होंगी।

साध्य ५—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २८ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—जब एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं को काटे, और

(अ) दो संगती कोण बराबर बनावे, या

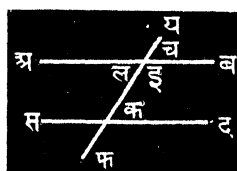
(ब) काटनेवाली रेखा की एक ओर के दो अन्तःकोणों का योग बराबर दो समकोणों के हो,

तो दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि सीधी रेखा य फ दो और सीधी रेखा अ ब और स द को काटती है।

(अ) < च = संगती कोण क, या

(ब) य फ की एक ही ओर अन्तःकोण क और इ = दो समकोणों के तो सिद्ध करना है कि

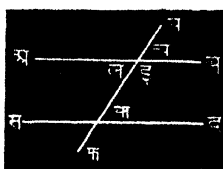
अ ब ॥ स द की होगी।

उपपत्ति (अ)— < च = सन्मुख < ल के (सा० ३—प्र०)

किन्तु < च = संगती < क के (कल्पना)

∴ < ल = एकान्तर < क

∴ अ ब ॥ स द की है (प्र० स० ४)

यही सिद्ध करना था।

उपपत्ति (ब)— < ल + < इ = दो समकोणों के (स० १ प्र०)

और < इ + < क = दो समकोणों के (कल्पना)

∴ < ल + < इ = < इ + < क

∴ < ल = < क

∴ अ ब ।। स द की है (सा० ४-प्र०)

यही सिद्ध करना था ।

अभ्यास

१—यदि चार सीधी रेखाओं से घिरे हुए क्षेत्र के सब कोणे समकोण हों, तो साध्य ५ प्रमेयेापपाद्य की सहायता से दो भिन्न भिन्न प्रणालियों से सिद्ध करो कि उसकी आमने सामने की भुजाएँ ।। होंगी ।

२—जब एक सीधी रेखा किसी दो और सीधी रेखाओं को काटे और काटने वाली रेखा की एक ओर के दो बहिःकोण मिल कर बराबर दो समकोणों के हों तो दोनों रेखा ।। होंगी ।

३—साध्य ५ प्रमेयेापपाद्य को उसी ढंग से सिद्ध करो जिससे साध्य ४ प्रमेयेापपाद्य को किया था ।

स्वयंसिद्धि १२—(प्लेफेयर साहब की स्वयंसिद्धि)

दो सीधी रेखा जो एक दूसरे को काटती हैं एकही सीधी रेखा की दोनों समानान्तर नहीं हो सकतीं ।

जैसे ज द और ज स दोनों अ ब रेखा की समानान्तर नहीं हो सकतीं क्योंकि वह एक दूसरे को ज बिन्दु पर काटती हैं ।

५.

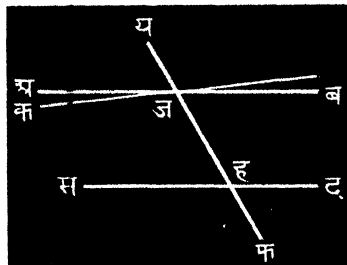
साध्य ६—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २१ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं को काटे तो,

(अ) एकान्तर कोण बराबर होंगे;

(ब) संगती कोण बराबर होंगे;

(स) काटने वाली रेखा के एक ओर के दो अन्तःकोण मिलकर बराबर दो समकोणों के होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि य फ रेखा दो ‖ रेखाओं अ ब और स द को क्रम से ज और ह पर काटती है।

यह सिद्ध करना है कि

(अ, ∠ अ ज ह = एकान्तर ∠ ज ह द।

(ब) ∠ य ज ब = संगती ∠ ज ह द।

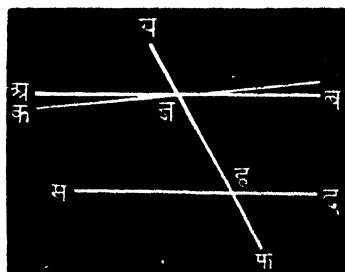
(स) य फ के एक ओर के अन्तःकोण ब ज ह और ज ह द मिल कर बराबर दो समकोणों के होंगे।

उपपत्ति (अ)—यदि < श्र ज ह = < ज ह द के नहीं है तो मान लो कि ज क रेखा ऐसी खींची गई है कि < क ज ह = एकान्तर < ज ह द बनाती है।

∴ क ज ॥ स द की है (सा० ४—प्र०)

किन्तु श्र ज ॥ स द की है (कल्पना)

∴ क ज श्रौर श्र ज दोनों स द की ॥ हुईं

जो असम्भव है (प्लेफेयर साहब की स्वयंसिद्धि)

∴ < श्र ज ह < ज ह द के नाबराबर नहीं हो सकता

अर्थात् < श्र ज ह = एकान्तर < ज ह द

यही सिद्ध करना था।

उपपत्ति—(ब) — ∵ < य ज ब = सन्मुख < श्र ज ह (सा० ३–प्र०

श्रौर श्र ज ह = एकान्तर < ज ह द (सा० ६—श्र—प्र०)

∴ < य ज ब = संगती < ज ह द

यही सिद्ध करना था।

उपपत्ति (स) — ∵ < ब ज ह + < श्र ज ह = दो समकोणों के

(सा० १—प्र०)

श्रौर < श्र ज ह = एकान्तर < ज ह द (सा० ६—श्र—प्र०)

∴ < ब ज ह + < ज ह द = दो समकोणों के

अभ्यास

१—चार सीधी रेखाओं से घिरे हुए क्षेत्र की आमने सामने की भुजाएँ ॥ हैं, सिद्ध करो कि उसके चारों कोण मिल कर बराबर चार समकोण के होंगे।

२—अभ्यास १ के क्षेत्र में यदि एक कोण समकोण हो तो सिद्ध करो कि उसके चारों कोण समकोण होंगे।

३—सिद्ध करो कि अभ्यास १ के क्षेत्र के सन्मुख < आपस में = होंगे।

४—यदि अ ब, स द पर ⊥ हो, तो यह स द की सम्पूर्ण ॥ रेखाओं पर भी ⊥ होगी।

साध्य ७—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० ३० अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—सीधी रेखायें जो एकही सीधी रेखा की समानान्तर हों आपस में समानान्तर होती हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि सीधी रेखा अ ब और स द में से प्रत्येक, सीधी रेखा य फ की समानान्तर है;

यह सिद्ध करना है कि

अ ब ॥ स द की होगी।

उपपत्ति—यदि अ ब और स द ॥ नहीं हैं तो यह लगातार बढ़ाई जाने से एक दूसरे को काटेंगी और दोनों एक ही सीधी रेखा की ॥ भी होंगी। किन्तु यह असम्भव है (प्लेफेयर साहब की स्वयंसिद्धि)

∴ अ ब और स द एक दूसरे को, चाहे कितनी ही बढ़ाई जायँ नहीं काटेंगी

∴ अ ब ॥ स द की है।

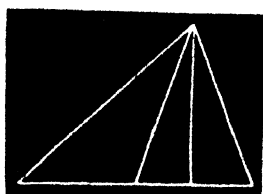
यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—यदि कोई सीधी रेखा किसी दो ॥ सीधी रेखाओं में से एक की ॥ हो तो वह दूसरी की भी ॥ होगी।

ऋजुभुज क्षेत्र की समानता

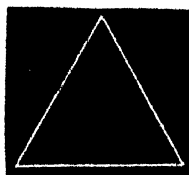
परिभाषायें

प० २२ त्रिभुज—वह क्षेत्र है जो तीन सीधी रेखाओं से घिरा हो।

त्रिभुज की वह भुजा जिस पर उसको खड़ा हुआ मानते हैं आधार कहलाती है और उसके सामने का बिन्दु शीर्ष।

शीर्षकोण से जो रेखा आधार पर लम्बरूप खींची जाती है उसको त्रिभुज की ऊँचाई या लम्ब कहते हैं।

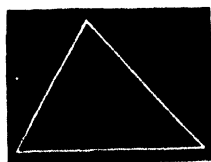
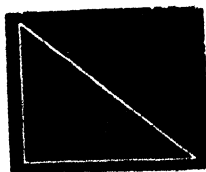
वह रेखा जो शीर्षकोण से सामने के भुजार्द्ध बिन्दु तक मिलाई जाती है मध्यगत रेखा कहलाती है।

प्रत्येक त्रिभुज में तीन कोण और तीन भुजाएँ अर्थात् सब मिलकर छः भाग होते हैं, इनके अतिरिक्त क्षेत्रफल भी होता है।

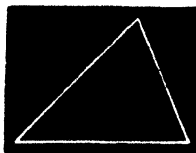
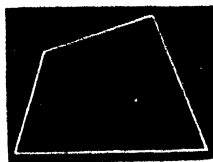
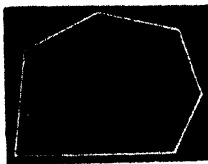
प० २३—समत्रिबाहु त्रिभुज वह है जिसकी तीनों भुजा बराबर हों।

प० २४—समद्विबाहु त्रिभुज—वह है जिसकी दो भुजा बराबर हों।

इसलिए प्रत्येक समत्रिबाहु त्रिभुज समद्विबाहु भी होता है।

समद्विबाहु त्रिभुज की दोनों बराबर रेखा, उसकी भुजा कहलाती हैं; बाक़ी भुजा को उसका आधार कहते हैं।

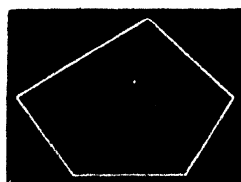
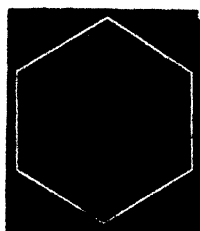
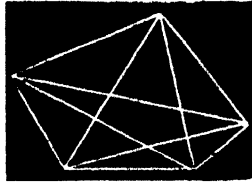
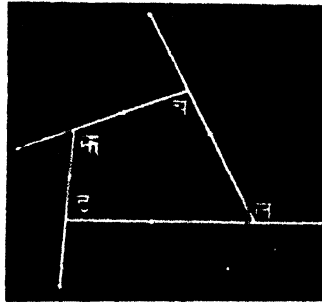
प० २५—विषमबाहु त्रिभुज—वह है जिसकी तीनों भुजा नाबराबर हों।

प० २६—समकोण त्रिभुज—वह है जिसका एक कोण समकोण हो

समकोण त्रिभुज में जो भुजा समकोण के सामने होती है वह कर्ण कहलाती है और बाक़ी दो भुजाओं को आधार और लम्ब कहते हैं।

प० २७—अधिककोण त्रिभुज—वह है जिसका एक कोण अधिक कोण हो।

प० २८—न्यूनकोण त्रिभुज—वह है जिसके तीनों कोण न्यून कोण हों।

प० २९—चतुर्भुज क्षेत्र—वह दर्पणोदर क्षेत्र है जो चार सीधी रेखाओं से घिरा हो।

प० ३०—बहुभुज क्षेत्र—वह दर्पणोदर क्षेत्र है जो चार या अधिक सीधी रेखाओं से घिरा हो।

इसलिए चतुर्भुज क्षेत्र भी एक बहुभुज क्षेत्र हुआ।

पाँच भुजा के बहुभुज क्षेत्र को पञ्चभुज क्षेत्र कहते हैं।

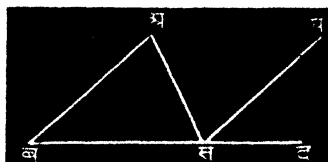
छः	,,	,,	षट् भुज	,,	,,
सात	,,	,,	सप्त भुज	,,	,,
आठ	,,	,,	अष्ट भुज	,,	,,
नव	,,	,,	नव भुज	,,	,,
दस	,,	,,	दस भुज	,,	,,
ग्यारह	,,	,,	एकादश भुज	,,	,,
बारह	,,	,,	द्वादश भुज	,,	,,
पन्द्रह	,,	,,	पञ्चदश भुज	,,	,,

प० ३१—उन्नतोदर बहुभुजक्षेत्र—का प्रत्येक कोण दो समकोणों से कम होता है।

प० ३२—समानकोण समबहुभुजक्षेत्र—की सम्पूर्ण भुजा बराबर होती हैं और सम्पूर्ण कोण भी बराबर होते हैं। (देखो परिभाषा ९)

प० ३३—किसी बहुभुज क्षेत्र के सन्मुख कोणों को मिलानेवाली सीधी रेखायें कर्ण कहलाती हैं ।

टिप्पणी—किसी दर्पणोदर ऋजुभुज क्षेत्र की सब भुजाएँ क्रम से बढ़ी हुई समझी जाती हैं जब कि वह एक ही ओर इस प्रकार बढ़ाई जायँ जिस प्रकार कोई बिन्दु चक्कर करके आकृति को बनाता है ।

किसी दर्पणोदर ऋजुभुज क्षेत्र के कोण जो उसकी भुजाओं के बढ़ाने से पैदा होते हैं बहिःकोण कहलाते हैं ।

किसी दर्पणोदर ऋजुभुज क्षेत्र के अन्तःकोणों में से वह कोण जो बहिःकोण के समीप नहीं हैं, बहिःकोण के अन्तस्थ और सन्मुख कहलाते हैं जैसे उक्त आकृति में सम्पूर्ण भुजाएँ क्रम से बढ़ाई गई हैं और कोण च, क और ह बहिःकोण ल के अन्तस्थ और सन्मुख कोण हैं ।

साध्य ८—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० ३२ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—प्रत्येक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग बराबर दो समकोणों के होता है।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स एक त्रिभुज है।

सिद्ध करना है कि

< अ + < ब + < स = दो समकोणों के।

बनावट—ब स रेखा को द तक बढ़ाओ

मान लो कि स य रेखा ब अ की ॥ खींची गई है।

उपपत्ति—∵ स य ॥ ब अ और अ स उनको काटती है

∴ < अ = एकान्तर < अ स य (सा० ६ अ·प्र०)

और ∵ स य ॥ ब अ की है और ब द उनको काटती है

∴ < ब = संगती < य स द (सा० ६ ब·प्र०)

∴ < अ + < ब = < अ स य + < य स द = < अ स द

∴ < अ + < ब + < स = < अ स द + < अ स ब

= दो समकोणों के (सा० १—प्र०)

यही सिद्ध करना था।

अनु० १—किसी त्रिभुज के कोई से दो कोण मिल कर दो समकोणों से कम होते हैं। (रे० सा० १७ अ० १)

अनु० २—यदि दो त्रिभुजों में से एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों तो उनके बाक़ी कोण भी बराबर होंगे।

अनु० ३—यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाय तो बहिःकोण जो इस प्रकार पैदा होगा सामने के दो अन्तःकोणों के योग के बराबर होगा। (रे० सा० ३२ अ० १)

अनु० ४—यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाय तो बहिःकोण सामने के अन्तःकोणों में से प्रत्येक से बड़ा होगा। (रे० सा० १६ अ० १)

अभ्यास

१—सिद्ध करो कि समत्रिबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण = $\frac{२}{३}$ समकोण के।

२—यदि △ के दो < का योग बराबर अनुपूरक के हो तो सिद्ध करो कि बाक़ी कोण समकोण होगा।

३—यदि △ का एक < बाक़ी दो का आधा हो तो बताओ कि उसका परिमाण क्या होगा? (३६°)

४—त्रिभुज के कोई से दो < की अर्द्धकों से बना हुआ कोण, सदा अधिक कोण होगा।

५—किसी चतुर्भुज क्षेत्र के < का योग = चार समकोणों के होता है।

६—प्रत्येक △ के कम से कम दो < न्यूनकोण होते हैं।

७—△ अ ब स का आधार ब स, द तक बढ़ाया गया है, < अ ब स और < अ स द की अर्द्धक क्रम से ब य और स य हैं जो बिन्दु य पर मिलती हैं सिद्ध करो कि < ब य स = $\frac{१}{२}$ < ब अ स।

८—यदि किसी △ की भुजाओं को क्रम से बढ़ाया जाय तो बहिःकोण जो इस प्रकार पैदा होंगे उनमें कम से कम दो अधिक कोण होंगे।

९—यदि किसी चतुर्भुज क्षेत्र की एक भुजा बढ़ाई जाय तो बहिःकोण जो इस प्रकार पैदा होगा वह सामने के किसी दो अन्तःकोणों के योग से कम होगा।

१०—यदि △ की एक भुजा बढ़ाई जावे तो क्या बहिःकोण अपने समीप के अन्तःकोण से बड़ा होगा ? आकृति खींच कर दिखलाओ और तर्कना करते हुए उत्तर दो।

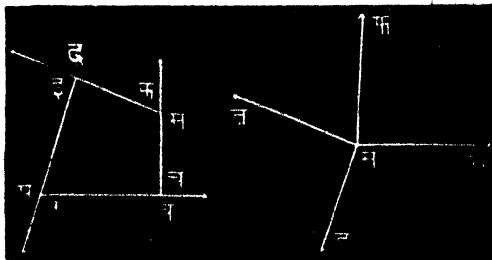
११—क्या किसी △ के आधार पर के दोनों कोण, अधिक कोण या समकोण हो सकते हैं ? सतर्क उत्तर दो।

१२—यदि किसी चतुर्भुज क्षेत्र के आमने सामने के कोण बराबर हों तो आमने सामने की भुजाएँ ॥ होंगी।

१३—यदि किसी △ की भुजाओं को आधार की ओर बढ़ाया जावे और इस प्रकार जो बहिःकोण पैदा हों उनके समद्विभाग किये जावें तो जो कोण अर्द्धकों से बनेगा वह आधार पर के कोणों के योग का आधा होगा।

साध्य ९—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० ३२ अ० १ का अनु०)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र की भुजाएँ एक ही क्रम से बढ़ाई जायँ तो बहिःकोणों का योग बराबर चार समकोणों के होगा।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स द उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र की भुजाएं क्रम से बढ़ाई गई हैं जिनसे बहिःकोण च, क, इ और ल बनते हैं;

सिद्ध करना है कि

<च + <क + <ह + <ल = चार समकोणों के।

बनावट—कल्पना करो कि बिन्दु म से म य, म फ, म ज और म ह क्रम से, अ ब, ब स, स द और द अ रेखाओं की ॥ खींची गई हैं और एक ही गति में भी हैं।

उपपत्ति—चूँकि म य और म फ, < च की भुजाओं के क्रम से ॥ खींची गई हैं और एक ही गति में हैं।

∴ <च = <य म फ (सा० ६—प्र०)

इसी प्रकार <क = <फ म ज

<ह = <ज म ह

<ल = <ह म य

∴ <च + <क + <ह + <ल = <य म फ + <फ म ज + <ज म ह + <ह म य = चार समकोणों के

(सा० १—प्र० अनु० २)

यही सिद्ध करना था।

अनु०—प्रत्येक उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र के सब अन्तःकोण और चार समकोण मिल कर उतने समकोणों के बराबर होते हैं जो गिनती में उस क्षेत्र की भुजाओं की संख्या से दूने हों।

उपपत्ति—भुजाओं को क्रम से बढ़ाओ। फिर

सब अन्तःकोण + सब बहिःकोण = बहुभुज क्षेत्र की भुजाओं की संख्या के दूने समकोणों के। (सा० १—प्र०)

∴ सब अन्तःकोण + चार समकोण = बहुभुज क्षेत्र की भुजाओं की संख्या के दूने समकोणों के। (सा० ६—प्र०)

अभ्यास

१—सिद्ध करो कि समअष्ट-भुज क्षेत्र का प्रत्येक बहिःकोण = ४५° ।

२—बताओ कि (१) समपञ्चभुज (२) समनवभुज क्षेत्र के प्रत्येक बहिः—कोण का परिमाण अंशों में क्या होगा ? (७२°, ४०°)

३—एक समानकोण समभुज क्षेत्र का प्रत्येक बहिःकोण = $\frac{२}{५}$ समकोण, तो बताओ कि उसमें कितनी भुजाएँ हैं ? (१०)

४—(१) समषट्भुज (२) समद्वादशभुज क्षेत्र के अन्तःकोण कितने कितने अंश के होते हैं ? (१२०°, १५०°)

५—क्या सम्भव है कि (१) केवल समअष्टभुज या (२) केवल समषट्भुज क्षेत्रों को लेकर किसी बिन्दु के चारों ओर इस प्रकार रक्खे कि चारों ओर का धरातल भर जाय और पच्चीकारी पूरी पूरी हो जाय ? (नहीं, हाँ)

६—सिद्ध करो कि किसी उन्नतोदर अष्टभुज के अन्तःकोणों का योग, बहिःकोण के योग से तिगुना होता है ।

७—(१) पञ्चभुज (२) षट्भुज क्षेत्रों के कर्णों की संख्या क्या होगी ? (५,९)

८—एक ऐसा पञ्चभुज क्षेत्र बनाओ जिसके सब < बराबर हों; किन्तु भुजा नाबराबर हों ।

९—एक ऐसा पञ्चभुज क्षेत्र बनाओ जिसकी सब भुजा = हों, किन्तु < नाबराबर हों ।

१०—न संख्या के समान कोण बहुभुज क्षेत्र का प्रत्येक

$$< = \frac{२ न — ४}{न} \text{समकोण} ।$$

११—उस उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र में कितनी भुजा होंगी जिसके बहिः—कोण यदि क्रम से लिए जायँ तो मिल कर = अन्तःकोणों के योग के हों ? (४)

प० ३४—जो आकृतियाँ एक दूसरे के ऊपर रखने से ठीक ठीक ढक लें वह अनुरूप कहलाती हैं, इसलिए स्वयंसिद्धि ६ से अनुरूप आकृति वह हैं जो एक दूसरी से प्रत्येक दशा में या सब प्रकार बराबर हो। दो आकृतियों की परस्पर समानता की सबसे उत्तम जाँच यह है कि वह एक दूसरे को ठीक ठीक ढक लेती हों।

दो अनुरूप आकृतियों में से कभी कभी एक को दूसरी की प्रति भी कहते हैं। दो क्षेत्रों की प्रत्येक दशा की बराबरी ≡ चिन्ह से प्रकट करते हैं। जैसेः—

△ अ ब स ≡ △ द य फ

इससे यह तात्पर्य है कि त्रिभुज अ ब स और द य फ प्रत्येक दशा में आपस में बराबर हैं; या यों कहो कि त्रिभुज अ ब स के सब भाग द य फ त्रिभुज के सब भागों के अलग अलग बराबर हैं।

जब एक क्षेत्र के सब कोण दूसरे क्षेत्र के उसी क्रम से सब कोणों के अलग अलग बराबर हों तो वह क्षेत्र समानकोण कहलाते हैं।

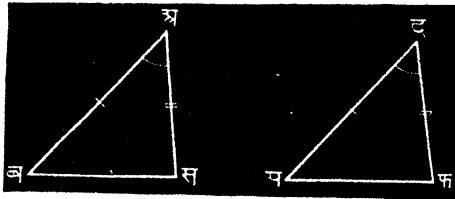
इसलिए हम कह सकते हैं कि दो अनुरूप त्रिभुज समान कोण रखने वाले होते हैं; किन्तु इस बात का स्मरण रक्खो कि हमने (पृष्ठ ४४) में "समानकोण" शब्द का और ही अर्थ किया था।

प० ३५—तीन या अधिक रेखा यदि एक ही बिन्दु पर मिलें तो उनको **सहगामी रेखा** कहते हैं।

प० ३६—तीन या अधिक बिन्दु जब एक ही सीधी रेखा में स्थित हों तो उनको **एक रैखिक बिन्दु** कहते हैं।

साध्य १०—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० ४ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों और उन भुजाओं के बीच के कोण भी बराबर हों तो दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो △ हैं जिनकी

अ ब = द य

अ स = द फ

बीच का < अ = बीच का < द

तो सिद्ध करना है कि

△ अ ब स ≡ △ द य फ

उपपत्ति—△ अ ब स को द य फ पर इस प्रकार रक्खो कि अ बिन्दु द बिन्दु पर पड़े और अ ब भुजा द य पर

फिर ∵ अ ब = द य (कल्पना)

∴ ब बिन्दु य पर पड़ता है।

∵ < अ = < द (कल्पना)

∴ अ स भुजा द फ पर पड़ती है।

और ∵ अ स = द फ

∴ स बिन्दु फ पर पड़ता है।

∴ △ अ ब स △ द य फ को ढकता है

∴ △ अ ब स ≡ △ द य फ

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

टिप्पणी—जब दो त्रिभुज जिनको अनुरूप सिद्ध करना हो एक दूसरे को ढकें तो नये विद्यार्थियों को चाहिए कि वह उनका अलग अलग खाका खींच लें।

१—जो रेखा समत्रिबाहु △ के किसी कोण के दो बराबर भाग करेगी वह △ को भी दो = भागों में विभाजित करेगी।

२—अ ब स द एक समानकोण समभुज चतुर्भुज है, सिद्ध करो कि अ स कर्ण < द अ ब और < द स ब में से प्रत्येक के दो बराबर भाग करेगा।

३—प्रत्येक समद्विबाहु △ के शीर्ष < की अर्द्धक रेखा आधार को समकोण पर दो बराबर भागों में विभाजित करती है।

४—यदि किसी △ के आधार के अर्द्धक बिन्दु से शीर्ष तक मिलानेवाली रेखा आधार पर ⊥ हो तो वह समद्विबाहु △ होगा।

५—अ ब स एक समद्विबाहु △ है जिसकी बराबर भुजा अ ब और अ स, द और य बिन्दु तक बढ़ाई गई हैं, यदि अ द = अ य हो तो सिद्ध करो कि ब य = स द होगी।

६—यदि अ ब स द चतुर्भुज क्षेत्र में अ द = ब स और < द अ ब = < स ब अ, सिद्ध करो कि द ब = स अ हैं।

७—अ ब स द एक चतुर्भुज क्षेत्र है जिसकी भुजा अ द = ब स और < अ द स = < ब स द, यदि स द का अर्द्धक बिन्दु य हो तो सिद्ध करो कि अ य = ब य है।

८—अ ब स समद्विबाहु △ की बराबर भुजा अ ब और अ स पर दो बिन्दु द और य ऐसे लिये गये हैं कि अ द = अ य, सिद्ध करो कि △ अ द स ≡ △ अ य ब है।

९—अ ब स एक △ है, ब स और ब अ को द और य पर दो बराबर भागों में विभक्त करके समकोण बनाती हुई रेखा खींची गई हैं जो फ बिन्दु पर मिलती हैं सिद्ध करो कि फ अ = फ ब = फ स।

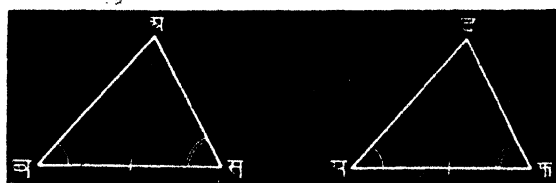
१०—यदि किसी चतुर्भुज का एक कर्ण दूसरे के, समकोण पर समद्विभाग करे तो वह सम्पूर्ण क्षेत्र को ऐसे दो △ में विभाजित कर देगा जो प्रत्येक दशा में बराबर होंगे।

११—सीधी रेखा, जो बराबर और ॥ सीधी रेखाओं के सिरों को एक ही ओर मिलाती हैं स्वयं भी बराबर और ॥ होती हैं। (रे०-सा०-३३ अ० १)

हल—कल्पना करो कि अ ब, स द = और ॥ रेखा हैं; जो एक ही दिशा में खींची गई हैं। ब स, अ स, ब द को मिलाओ तो <अ ब स = < ब स द [साध्य ६—प्र०] इसलिए △अ ब स ≡ △ब स द [साध्य १० प्रमेयोपपाद्य] अब साध्य ४ प्रमेयोपपाद्य को लगाओ।

साध्य ११—प्रमेयोपपाद्य

(रे० सा० २६ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के अलग अलग बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की संगती भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज अनुरूप होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो△ हैं जिनकी ब स = य फ, <ब = <य और <स = <फ और ∴ <अ = <द

(सा० ८ प्र० का अनु०)

तो सिद्ध करना है कि

△ अ ब स ≡ △द य फ

उपपत्ति—△अ ब स को △द य फ पर इस प्रकार रक्खो कि ब बिन्दु य पर पड़े और ब स भुजा य फ पर

फिर ∵ ब स = य फ (कल्पना)

∴ बिन्दु स फ पर पड़ता है

और ∵ < ब = < य (कल्पना)

∴ ब अ, य द पर पड़ती है

और ∵ < स = < फ (कल्पना)

∴ स अ भुजा फ द पर पड़ती है

∴ बिन्दु अ भुजा य द और फ द दोनों पर पड़ता है

∴ अ बिन्दु द पर पड़ता है जहाँ कि द य और फ द एक दूसरी से मिलती हैं

∴ △अ ब स △द य फ को ढकता है

∴ △अ ब स ≡ △द य फ

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—यदि किसी △ के किसी < की अर्द्धक सामने की भुजा पर ⊥ हो तो △ समद्विबाहु होगा।

२—समकोण त्रिभुजों में यदि एक का न्यूनकोण दूसरे के न्यूनकोण के = हो और उनके कर्ण भी = हों तो वह आपस में प्रत्येक दशा में = होंगे।

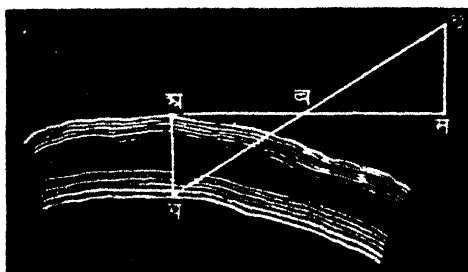
३—ल क सीधी रेखा के अर्द्धक बिन्दु र में से होकर एक सीधी रेखा खींची गई है और ल और क बिन्दुओं से इस रेखा पर ल च और क ह ⊥ डाले गये हैं सिद्ध करो कि ल च = क ह।

४—अ ब स एक △ है, < अ की अर्द्धक पर ब द य ⊥ डाला गया है जो अर्द्धक से द पर और अ स से य पर मिलता है, सिद्ध करो कि ब द = द य।

५—अ ब स द एक चतुर्भुज है, < अ और स के, कर्ण अ स समद्विभाग करता है, सिद्ध करो △अ द स ≡ △अ ब स।

६—यदि किसी चतुर्भुज की आमने सामने की भुजाएँ ॥ हों तो वह आपस में बराबर भी होंगी।

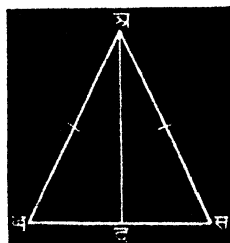
७—यदि किसी चतुर्भुज की आमने सामने की भुजाएँ = हों तो कर्ण एक दूसरे के समद्विभाग करेंगे।

८—एक दुर्गम नदी के इस पार अ एक ऐसा बिन्दु लिया गया है कि जो उस पार की य वस्तु के ठीक सामने है, अ स रेखा अ य के साथ समकोण बनाती हुई खींची गई है और व बिन्दु पर दो समान भागों में विभाजित की गई है, और स द रेखा अ स के साथ ⊥ बनाती हुई खींची गई है जो य व के बढ़े हुए भाग से द पर मिलती है सिद्ध करो कि स द = अ य।

९—अभ्यास ८ की बनावट से हम कौन सा प्रयोजनीय काम ले सकते हैं ?

प० ३७—किसी आकृति की सुडौलपन की धुरी वह रेखा है जिस पर यदि आकृति को तह किया जाय तो उसका एक अर्द्ध भाग दूसरे अर्द्धभाग पर ठीक ठीक ढक जाय। जैसे, वृत्त की सुडौलपन की धुरी व्यास है।

साध्य १२—प्रमेयोपपाद्य

(रे० सा० ५ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी त्रिभुज की दो भुजा बराबर हों तो उन भुजाओं के सामने के कोण भी बराबर होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स △ है जिसकी

अ ब = अ स

तो सिद्ध करना है कि

< स = < ब।

बनावट—मान लो कि < ब अ स को रेखा अ द दो बराबर भागों में भाजित करती हुई ब स के द बिन्दु पर मिलती है।

उपपत्ति—△ अ ब द और अ स द में

∵ { अ ब = अ स (कल्पना)
और अ द उभयनिष्ठ है
< ब अ द = < स अ द (बनावट)

∴ △ अ ब द ≡ △ अ स द (सा० १०—प्र०)

∴ < स = < ब

यही सिद्ध करना था।

अनु० १—यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा बढ़ाई जायँ तो आधार की दूसरी ओर जो कोण बनेंगे वह आपस में बराबर होंगे।

अनु० २—प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्षकोण की अर्द्धक रेखा आधार की भी अर्द्धक होगी।

अनु० ३—प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्षकोण की अर्द्धक आधार पर लम्ब होगी।

अभ्यास

१—यदि कोई △ समत्रिबाहु हो तो इसके सब कोण भी बराबर होंगे।

२—समद्विबाहु △ के शीर्षकोण से जो ⊥ आधार पर डाला जाता है वह △ को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

३—समद्विबाहु △ के शीर्षकोण की अर्द्धक, △ को दो बराबर भागों में बाँटती है।

४—समद्विबाहु △ के शीर्षकोण से आधार के अर्द्धक बिन्दु तक जो रेखा मिलाई जायगी वह △ को दो बराबर भागों में विभाजित करेगी।

५—अ ब स एक समद्विबाहु △ है जिसकी भुजाएँ ब स, स अ और अ ब बिन्दु द, य और फ पर समद्विभाग की गई हैं, सिद्ध करो कि △ द य फ भी समद्विबाहु होगा।

६—अ ब स एक समद्विबाहु △ है जिसके आधार पर द और य ऐसे बिन्दु लिये गये हैं कि द ब = य स तो सिद्ध करो कि ∠ अ द य = ∠ अ य द के होगा।

७—अ ब स एक समद्विबाहु △ है जिसका आधार ब स, दोनों ओर द और य तक बढ़ाया गया है, यदि ब द = स य हो तो सिद्ध करो कि अ द = अ य के होगी।

८—अ ब स समद्विबाहु △ की भुजा अ ब और अ स शीर्षकोण अ की ओर य और फ तक बढ़ाई गई हैं, यदि अ य = अ फ हो तो सिद्ध करो कि य स = फ ब के होगी।

९—अ ब स और द य फ दो समद्विबाहु △ हैं यदि शीर्षकोण अ = शीर्षकोण द के हो तो सिद्ध करो कि < ब = < य और < स = < फ के होगा।

१०—यदि किसी समद्विबाहु △ की एक भुजा, शीर्षकोण की ओर बढ़ाई जाय तो इस प्रकार जो बहिःकोण बनेगा वह आधार पर के कोणों में से प्रत्येक का दूना होगा।

११—समद्विबाहु △ के शीर्षकोण से जो सीधी रेखा आधार की ॥ खींची जावेगी वह △ की भुजाओं के साथ बराबर कोण पैदा करेगी।

१२—अ ब स समत्रिबाहु △ की भुजाओं पर, समत्रिबाहु △ द ब स, य स अ और फ अ ब बनाये गये हैं, सिद्ध करो कि द य फ भी समत्रिबाहु △ है।

१३—समान भुजा वाले चतुर्भुज के कर्ण जिन कोणों में होकर आते हैं उनके समद्विभाग करते हैं।

१४—प्रत्येक समत्रिबाहु △ के कोणों के बिन्दुओं से जो तीन सीधी रेखा सामने के भुजार्द्ध बिन्दुओं तक खींची जाती हैं, वह आपस में बराबर होती हैं।

१५—समत्रिबाहु △ की भुजाओं के समद्विभाग करके जो सीधी रेखा मिलाई जाती हैं वह भी एक समत्रिबाहु △ की भुजा होती हैं।

साध्य १३—प्रमेयोपपाद्य

(रे० सा० ६ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उन कोणों के सामने की भुजा भी बराबर होंगी।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स एक △ है जिसका < ब = < स तो सिद्ध करना है कि

अ स = अ ब ।

बनावट—मान लो कि अ द रेखा < ब अ स के समद्विभाग करती हुई ब स भुज के द बिन्दु पर मिलती है ।

उपपत्ति—अ ब द और अ स द दो △ में

∵	< ब	= < स	(कल्पना)
	< ब अ द	= < स अ द	(बनावट)
	अ द उभयनिष्ठ है		
∴	△ अ ब द	≡ △ अ स द	(सा० ११—प्र०)
∴	अ स	= अ ब	

यही सिद्ध करना था ।

अभ्यास

१—यदि किसी △ के सब कोण बराबर हों तो उसकी सब भुजा भी बराबर होंगी ।

२—अ ब स एक △ है जिसका < ब = २ < अ और द ब रेखा, < ब के समद्विभाग करती हुई अ स रेखा के बिन्दु द पर मिलती है; सिद्ध करो कि ब द = द अ ।

३—यदि अ ब स समद्विबाहु △ के आधार पर के < ब और < स की अर्द्धक, बिन्दु म पर मिलें तो सिद्ध करो कि म ब = म स ।

४—अ ब स एक समद्विबाहु △ की बराबर भुजा आधार की ओर बढ़ाई गई हैं, यदि कल्पना की जाय कि आधार ब स की दूसरी ओर जो बहिःकोण बनते हैं उनकी अर्द्धक म बिन्दु पर मिलती हैं तो सिद्ध करो कि म ब = म स के है ।

५—अ ब स समद्विबाहु △ की भुजा अ ब और अ स में द और य ऐसे बिन्दु लिये गये हैं कि द य ॥ ब स, सिद्ध करो कि अ द = अ य ।

६—यदि किसी △ की भुजायें बढ़ाई गई हों और आधार की दूसरी ओर के बहिःकोण आपस में बराबर हों तो वह △ समद्विबाहु होगा ।

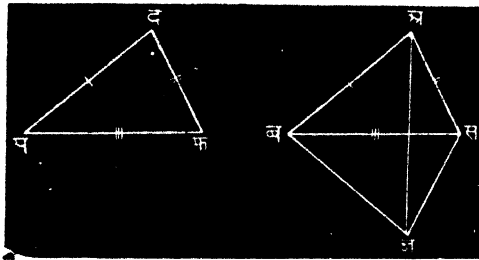
७—अ ब स △ की एक भुजा ब स, बिन्दु द तक बढ़ाई गई है, यदि < अ स द की अर्द्धक अ ब की ॥ हो तो सिद्ध करो कि स अ = स ब ।

८—अ ब स समकोण △ के अ स कर्ण में द एक ऐसा बिन्दु लिया गया है कि < द ब अ = < द अ ब, सिद्ध करो कि द अ = द ब = द स के है ।

९—सिद्ध करो कि समकोण △ अ ब स के कर्ण अ स के अर्द्धक बिन्दु तक, समकोण से जो रेखा खींची जायगी वह कर्ण की आधी होगी ।

साध्य १४—प्रमेयोपपाद्य

(रे० सा० ८ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की तीनों भुज दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अलग अलग बराबर हों तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होंगे ।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो △ हैं जिनकी

$$\begin{cases} \text{अ ब} = \text{द य} \\ \text{अ स} = \text{द फ} \\ \text{ब स} = \text{य फ} \end{cases}$$

तो सिद्ध करना है कि

△ अ ब स ≡ △ द य फ

बनावट—कल्पना करो कि ब स, अ ब या अ स दोनों से छोटा नहीं है।

अब ∵ य फ = ब स **(कल्पना)**

△ द य फ को इस प्रकार रख सकते हैं कि य फ, ब स को ढक ले और बिन्दु द, ब स की ओर बिन्दु अ के सामने पड़े।

मान लो कि जहाँ बिन्दु द पड़ता है वह ज है; इसलिए ज ब स △ द य फ की नवीन स्थिति हुई।

अ ज को मिलाओ।

उपपत्ति— ∵ अ ब = द य **(कल्पना)**

= ज ब **(बनावट)**

∴ ∠ ब अ ज = ∠ ब ज अ **(सा० १२—प्र०)**

और ∵ अ स = द फ (कल्पना)

= ज स (बनावट)

∴ <स अ ज = <स ज अ (सा० १२—प्र०)

∴ <ब अ ज + <स अ ज = <ब ज अ + <स ज अ

∴ <ब अ स = <ब ज स

= <य द फ (बनावट)

इसलिए दो △ अ ब स और द य फ में

{ अ ब = द य
 अ स = द फ
 बीच का <ब अ स = बीच के <य द फ

∴ △अ ब स ≡ △द य फ (सा० १०—प्र०)

यही सिद्ध करना था।

टिप्पणी—साध्य १० प्रमेयोपपाद्य की प्रतिज्ञा में एक कल्पित अर्थ और एक फल को अदल बदल कर साध्य १४ प्रमेयोपपाद्य की प्रतिज्ञा बनाई गई है, जैसा कि निम्न लिखित विवरण से प्रकट है।

साध्य १० प्रमेयोपपाद्य	साध्य १४ प्रमेयोपपाद्य
कल्पित अर्थ	**कल्पित अर्थ**
अ ब = द य	अ ब = द य
अ स = द फ	अ स = द फ
<ब अ स = <य द फ	ब स = य फ
फल	**फल**
ब स = य फ	<ब अ स = <य द फ
<अ ब स = <द य फ	<अ ब स = <द य फ
<अ स ब = <द फ य	<अ स ब = <द फ य
△अ ब स = △द य फ	△अ ब स = △द य फ

इसलिए साध्य १४ प्रमेयोपपाद्य, साध्य १० प्रमेयोपपाद्य का विलोम है। [देखो पृष्ठ २६]

अभ्यास

१—यदि एक △ की तीन भुजा दूसरे △ की तीन भुजाओं के क्रम से = हों तो एक के तीन कोण भी = दूसरे के तीनों कोणों के होंगे।

२—बराबर आधारों पर समत्रिबाहु △ प्रत्येक दशा में बराबर होते हैं।

३—यदि किसी चतुर्भुज की आमने सामने की भुजा = हों तो आमने सामने के < भी = होंगे।

४—अ ब स समत्रिबाहु △ के अन्दर द एक ऐसा बिन्दु लिया गया है कि < द ब स = < द स ब, सिद्ध करो कि < ब अ स की अर्द्धक द अ है।

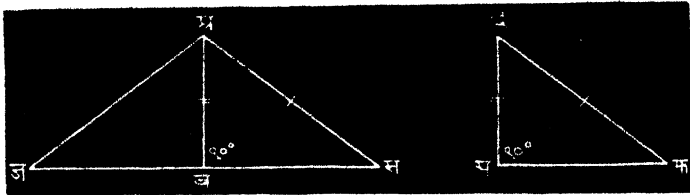
५—यदि किसी चतुर्भुज की आमने सामने की भुजा = हों तो वह ॥ भी होंगी।

६—एक उभयनिष्ठ आधार की एक ही ओर यदि कितने ही △ ऐसे बनाये जावें जिनकी वह भुजायें जो आधार के एक सिरे पर मिलती हैं बराबर हों तो वह भुजाएँ जो आधार के दूसरे सिरे पर मिलती हैं नाबराबर होंगी।

(रे०—सा० ७ अ० १)

७—यदि △ अ ब स को भुजा ब स पर उलट दिया जावे तो सिद्ध करो कि ब स ⊥ होगा उस रेखा का जो अ के दोनों स्थानों को मिलाती है।

साध्य १५—प्रमेयोपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्ण बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज अनुरूप होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके

{ कर्ण अ स = कर्ण द फ
  अ ब = द य

तो सिद्ध करना है कि

△अ ब स ≡ △द य फ।

बनावट— ∵ द य = अ ब

△द य फ को इस प्रकार रख सकते हैं कि द य भुजा अ ब को ढक ले और फ बिन्दु अ ब भुजा की ओर स बिन्दु के सामने पड़े।

मान लो कि ज वह बिन्दु है जिस पर फ गिरता है।

∴ △द य फ की नवीन दशा △अ ब ज हो गई।

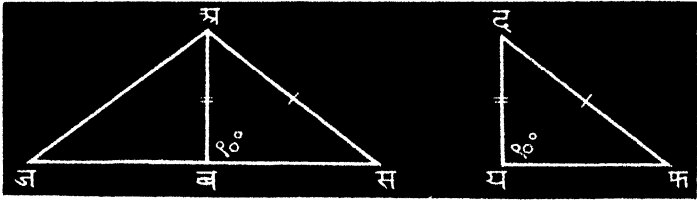
उपपत्ति— ∵ ∠अ ब स और ∠अ ब ज (= ∠द य फ) ⊥ हैं (कल्पना)

∴ ज ब स एक सीधी रेखा है (सा० २—प्र०)

∵ अ ज = द फ (बनावट)

= अ स (कल्पना)

∴ ∠अ स ज = ∠अ ज स (सा० १२—प्र०)

= ∠द फ य (बनावट)

अब ∵ दो △ अ ब स, द य फ में

{ < ब = < य (कल्पना)
< स = < फ (सिद्ध कर चुके हैं)
अ स = द फ (कल्पना)

∵ △ अ ब स ≡ △ द य फ (सा० ११—प्र०)

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—एक △ अ ब स की भुजा अ स और अ ब पर ब द और स य ⊥ डाले गये हैं, यदि ब द = स य हो तो सिद्ध करो कि अ ब = अ स के होगी।

२—△ अ ब स के आधार के अर्द्धक बिन्दु से द य, द फ ⊥ अ स और अ ब भुजा पर डाले गये हैं, यदि द य = द फ हो, तो सिद्ध करो कि अ ब = अ स।

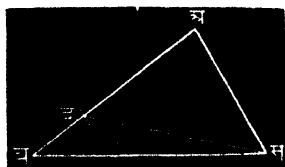
३—समद्विबाहु △ के शीर्षकोण से जो ⊥ आधार पर डाला जाता है वह △ को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

४—यदि दो △ में एक की दो भुजा दूसरे की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों और उनकी ऊँचाइयाँ भी बराबर हों तो सिद्ध करो कि यह प्रत्येक दशा में बराबर होंगे।

ऋृजुभुजक्षेत्रों की असमानता

साध्य १६—प्रमेयोपपाद्य

(रे० — सा० १८ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ ना बराबर हों तो बड़ी भुजा के सामने बड़ा कोण होगा।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स एक △ है जिसकी अ ब भुजा अ स से बड़ी है;

तो सिद्ध करना है कि

< अ स ब बड़ा होगा < अ ब स से।

बनावट—अ ब में से अ स के बराबर अ द काट लो।

स द को मिलाओ।

उपपत्ति—∵ अ द = अ स (बनावट)

∴ < अ द स = < अ स द (सा० १२—प्र०)

किन्तु बहिःकोण अ द स बड़ा है अपने सामने के अन्तःकोण अ ब स से (सा० ८ प्र० का अनु० ४)

∴ < अ स द बड़ा है < अ ब स से

किन्तु < अ स ब बड़ा है < अ स द से

∴ < अ स ब बड़ा हुआ < अ ब स से

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—यदि किसी △ के आधार पर के कोण = हों तो वह △ समद्विबाहु △ होगा। साध्य १६ प्रमेयोपपाद्य की सहायता से इसको व्यतिरेक युक्ति साधने से सिद्ध करो।

२—अ ब स एक < है जिसकी अ स भुजा अ ब भुजा से छोटी है, सिद्ध करो कि < अ ब स न्यून कोण है।

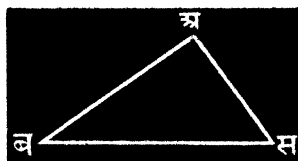
३—प्रत्येक △ में सबसे बड़ी भुजा के सामने सब से बड़ा कोण होता है।

४—अ ब स द एक चतुर्भुज है जिसकी भुजा अ ब = अ द; किन्तु ब स छोटी है द स से, सिद्ध करो कि < अ ब स बड़ा होगा < अ द स से।

५—समद्विबाहु △ का आधार बराबर भुजाओं में से प्रत्येक से बड़ा है। सिद्ध करो कि उसका शीर्षकोण ६०° से बड़ा है।

साध्य १७—प्रमेयोपपाद्य

(रे० सा० १६ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि किसी त्रिभुज के दो कोण ना बराबर हों तो बड़े कोण के सामने बड़ी भुजा होगी।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स एक △ है जिसका

$\angle$ स बड़ा है $\angle$ ब से,

तो सिद्ध करना है कि

अ ब बड़ी होगी अ स से ।

उपपत्ति—यदि अ ब रेखा अ स से बड़ी नहीं है तो,

या (१) अ ब = अ स

या (२) अ ब छोटी होगी अ स से ।

किन्तु यदि अ ब = अ स

तो $\angle$ स = $\angle$ ब (सा० १२—प्र०)

यह असम्भव है (कल्पना)

और यदि अ ब छोटी है अ स से

तो $\angle$ स छोटा है $\angle$ ब से (सा० १६—प्र०)

यह असम्भव है (कल्पना)

$\therefore$ अ ब अवश्य अ स से बड़ी है

यही सिद्ध करना था ।

टिप्पणी—साध्य १७ प्रमेयोपपाद्य जिस प्रणाली से सिद्ध की गई है, उसको वियोगविधि कहते हैं । यह इस बात पर निर्भर है कि जब कई एक कल्पित बातों में से एक बात अवश्य ठीक माननीय होती है तो यह सिद्ध कर देना होता है कि एक बात के अतिरिक्त सम्पूर्ण कल्पित बातें अशुद्ध हैं और यही एक बात ठीक है ।

अभ्यास

१—समकोण $\triangle$ में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होगी ।

२—यदि $\triangle$ अ ब स के शीर्षकोण अ से $\perp$ डाला जाय और वह आधार पर या उसके बढ़े हुए भाग द पर मिले तो सिद्ध करो कि द ब छोटी होगी अ ब से और द स छोटी होगी अ स से ।

३—सिद्ध करो कि प्रत्येक $\triangle$ की दो भुजा मिल कर तीसरी से बड़ी होती हैं ।

४—यदि अ ब स△के आधार के ब और स कोणों की अर्द्धक द पर मिलें और अ ब को अ स से बड़ी मानें तो सिद्ध करो कि द ब बड़ी होगी द स से।

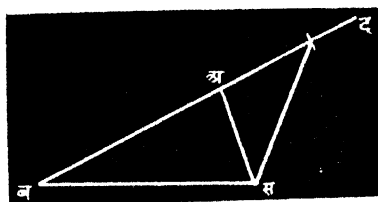
५—अ ब स समद्विबाहु △ के आधार ब स को किसी बिन्दु द तक बढ़ाया गया है, तो सिद्ध करो कि अ द बड़ी होगी अ ब से।

६—समद्विबाहु △ की प्रत्येक भुजा उस सीधी रेखा से बड़ी होगी जो शीर्ष कोण से आधार के किसी बिन्दु तक खींची जाय।

७—एक दिये हुए बिन्दु से एक दी हुई सीधी रेखा तक दो सीधी रेखाओं से अधिक बराबर रेखा नहीं खिंच सकतीं।

साध्य १८ प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २० अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—त्रिभुज की कोई सी दो भुजा मिल कर तीसरी से बड़ी होती हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स एक △ है, तो सिद्ध करना है कि

सकी किसी दो भुजाओं का योग तीसरी से बड़ा होगा।

बनावट—ब अ भुजा को द तक बढ़ाओ,

अ द में से अ य = अ स काट लो,

स और य को मिलाओ।

उपपत्ति—∵ अ स = अ य (बनावट)

∴ < अ य स = < अ स य (सा० १२ प्र०)

किन्तु < ब स य बड़ा है < अ स य से

∴ < ब स य बड़ा है < अ य स से

बड़ा है < ब य स से

∴ ब य बड़ी है ब स से (सा० १७ प्र०)

किन्तु ब य = ब अ + अ य = ब अ + अ स (बनावट)

∴ ब अ + अ स बड़ी हैं ब स से

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

अ ब + ब स बड़ी हैं अ स से।

अ स + स ब बड़ी हैं अ ब से।

यही सिद्ध करना था।

अनु०—त्रिभुज की किसी दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होगा।

अभ्यास

१—चतुर्भुज की कोई सी तीन भुजा मिल कर चौथी से बड़ी होती हैं।

२—अ ब स एक △ है और अ स में द कोई बिन्दु है; सिद्ध करो कि अ स + ब स बड़ी होंगी अ द + ब द से।

३—समद्विबाहु △ की प्रत्येक भुजा आधार के आधे से बड़ी होती है।

४—अ ब स एक △ है। अ ब और अ स पर क्रम से द और य बिन्दु लिये गये हैं; सिद्ध करो कि त्रिभुज अ ब स का घेरा, चतुर्भुज ब द य स के घेरे से बड़ा होगा।

५—प्रत्येक चतुर्भुज की कोई सी दो सामने की भुजाएँ, कर्णों के योग से छोटी होंगी।

६—अ ब स △ के अन्दर म एक बिन्दु है:—सिद्ध करो कि म अ + म ब + म स बड़ी होंगी ½ (अ ब + ब स + अ स) से।

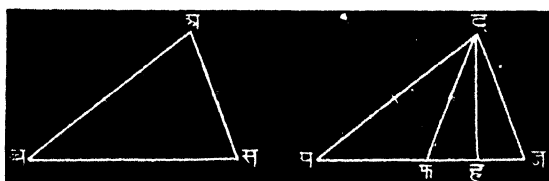
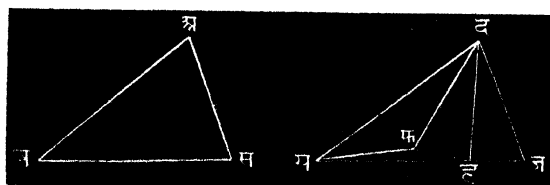
७—प्रत्येक चतुर्भुज का घेरा अपने कर्णों के योग से बड़ा होगा।

८—किसी ⊙ में व्यास से बड़ी कोई रेखा नहीं खींची जा सकती है।

९—किसी चतुर्भुज के कर्ण मिल कर उसके घेरे के आधे से बड़े होते हैं।

साध्य १९ प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २४ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो त्रिभुजों में एक की दो भुजा दूसरे की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों; किन्तु उनके बीच के कोण ना बराबर हों तो उस त्रिभुज का आधार जिसका कि बीच का कोण बड़ा है दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा होगा।

पहिला रूप

दूसरा रूप

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो △ हैं जिनमें

{ अ ब = द य
  अ स = द फ
  बीच का < ब अ स बड़ा है बीच के कोण य द फ से

तो सिद्ध करना है कि

आधार ब स आधार य फ से बड़ा होगा।

बनावट—△अ ब स को △द य फ पर इस प्रकार रक्खो कि अ बिन्दु द पर और अ ब रेखा द य पर पड़े

फिर ∵ अ ब = द य (कल्पना)

∴ ब बिन्दु य पर पड़ता है

और ∵ < ब अ स बड़ा है < य द फ से

∴ अ स रेखा < ब द फ के बाहर स्थित हुई (कल्पना)

कल्पना करो कि स बिन्दु वहाँ पड़ता है जहाँ ज है और △अ ब स का नया स्वरूप द य ज है।

मान लो कि द ह < फ द ज के समद्विभाग करती हुई य ज के बिन्दु ह पर मिलती है।

फ ह को मिलाओ

उपपत्ति-पहिला रूप—मान लो कि बिन्दु फ, य ज सीधी रेखा में है

फिर य ज बड़ा है य फ से

या ब स बड़ा है य फ से

यही सिद्ध करना था।

दूसरा रूप—मान लो कि बिन्दु फ, य ज सीधी रेखा में नहीं है अब दो △द ह फ और द ह ज में

{ द फ = द ज (कल्पना)
  द ह उभयनिष्ठ है
  < फ द ह = < ज द ह (बनावट)

∴ ह फ = ह ज (सा० १०—प्र०)

अब य फ ह △ में

य ह + ह फ मिल कर य फ से बड़ी हैं (सा० १८—प्र०)

या य ह + ह ज मिल कर य फ से बड़ी हैं

या ब स बड़ी है य फ से

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

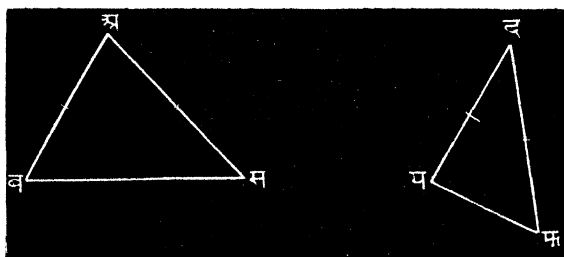
१—△अ ब स में अ द मध्यगत रेखा है और < अ द ब ⊥ से छोटा है, सिद्ध करो कि अ स बड़ी होगी अ ब से।

२—अ ब रेखा के अर्द्धक बिन्दु स से स द सीधी रेखा ऐसी खींची गई है कि अ स द अधिक कोण है, सिद्ध करो कि अ द बड़ी है ब द से।

३—ल क र च एक चतुर्भुज है, जिसकी भुजा ल च=क र और <ल च र बड़ा है <क र च से; सिद्ध करो कि ल र बड़ी है क च से।

साध्य २० प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० २५ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के अलग अलग बराबर हों; किन्तु आधार नाबराबर हों तो इस त्रिभुज की भुजाओं के बीच का कोण। जिसका कि आधार बड़ा है दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के बीच के कोण से बड़ा होगा।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स और द य फ दो △ हैं जिनमें

ब अ=य द
और अ स=द फ
किन्तु आधार ब स बड़ा है आधार य फ से,

तो यह सिद्ध करना है कि

बीच का कोण ब अ स बड़ा होगा बीच के कोण य द फ से ।

उपपत्ति—यदि <ब अ स <य द फ से बड़ा नहीं है तो—

या (१) <ब अ स = <य द फ हो

या (२) <ब अ स छोटा हो <य द फ से ।

किन्तु यदि <ब अ स = <य द फ है

तो ब स = य फ (सा० १०—प्र०)

जो असम्भव है (कल्पना)

और यदि <ब अ स छोटा है <य द फ से

तो ब स छोटी हुई य फ से (सा० १९—प्र०)

किन्तु यह भी असम्भव है (कल्पना)

∴ <ब अ स अवश्य <य द फ से बड़ा है ।

यही सिद्ध करना था ।

अभ्यास

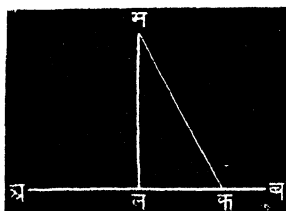
१—एक ⊙ की परिधि पर जिसका केन्द्र म है अ, ब और स बिन्दु लिये गये हैं; यदि अ ब, ब स से बड़ी हो तो सिद्ध करो कि <अ म ब बड़ा होगा <ब म स से ।

२—ल क र च एक चतुर्भुज है जिसकी भुजा ल च = क र और ल र बड़ी है क च से सिद्ध करो कि <ल च र <क र च से बड़ा होगा ।

३—ल क र च एक चतुर्भुज है जिसकी भुजा ल च = क र और ल क भुजा छोटी है र च से, सिद्ध करो कि <ल च क <च क र से छोटा होगा ।

४—△अ ब स में अ द मध्यगत रेखा है और भुजा अ स बड़ी है अ ब से सिद्ध करो कि <अ द ब एक ⊥ से छोटा है ।

साध्य २१—प्रमेयोपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—दी हुई सीधी रेखा पर दिये हुए बिन्दु से जो उस रेखा के बाहर है जितनी सीधी रेखा खींची जायेंगी उनमें लम्ब सब से छोटा होगा।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब एक दी हुई सीधी रेखा है और म एक दिया हुआ बिन्दु है जो इस रेखा के बाहर है और म से अ ब पर म ल लम्ब डाला गया है, म क कोई और सीधी रेखा है जो अ ब के क बिन्दु पर मिलती है;

तो सिद्ध करना है कि

म ल छोटी होगी म क से

उपपत्ति— ∵ <म ल क = एक ⊥ (कल्पना)

और <म ल क + <म क ल मिलकर दो ⊥ से छोटे हैं (सा० ८ प्र० अनु० १)

∴ <म क ल एक ⊥ से छोटा हुआ

∴ <म क ल छोटा हुआ <म ल क

∴ म ल छोटा हुआ म क से। (सा० १७—प्र०)

यही सिद्ध करना था।

प्र० ३८—किसी बिन्दु से किसी सीधी रेखा की दूरी वह लम्ब है, जो इस बिन्दु से उस रेखा तक खींचा जाय।

अभ्यास

१—साध्य २१ प्रमेयोपपाद्य की सहायता से सिद्ध करो कि ⊥ त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होता है।

२—समद्विबाहु △ के आधार पर के सिरे सामने की भुजाओं से बराबर दूरी पर होते हैं।

३—समद्विबाहु △ के आधार का अर्द्धक बिन्दु, सामने की भुजाओं से बराबर दूरी पर होता है।

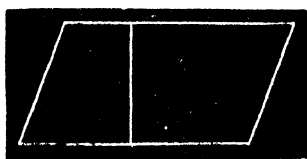
४—किसी < की अर्द्धक पर का कोई बिन्दु कोण की भुजाओं से बराबर दूरी पर होता है।

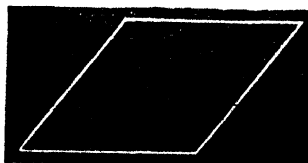
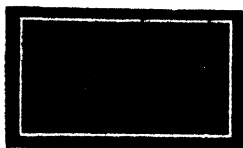
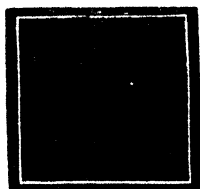
५—यदि किसी कोण की भुजाओं से कोई बिन्दु बराबर दूरी पर होगा, तो वह बिन्दु कोण की अर्द्धक रेखा में स्थित होगा।

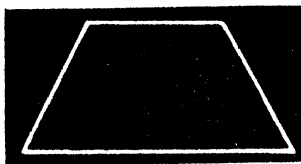
६—अ ब स एक △ है, अ ब और अ स को क्रम से द और य तक बढ़ाया गया है, < द ब स और < य स ब की अर्द्धक म पर मिलती हैं; तो सिद्ध करो कि म— अ ब, ब स, स अ से बराबर दूरी पर होगा।

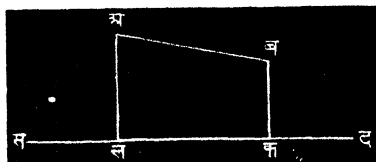
समानान्तर और समलम्ब चतुर्भुजों का वर्णन

परिभाषायें

प० ३९—समानान्तर चतुर्भुज—वह चतुर्भुज है जिसकी आमने सामने की भुजा समानान्तर हों।

समानान्तर चतुर्भुज की वह भुजा जिस पर उसको खड़ा हुआ मानें, उसका आधार कहलाता है और सामने की भुजा के किसी बिन्दु से जो रेखा आधार पर लम्ब रूप डाली जाती वह उसकी ऊँचाई या लम्ब समझा जाता है।

प० ४०—विषम कोण सम चतुर्भुज—वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसकी दोनों समीपी भुजाएँ बराबर हों।

प० ४१—आयत—वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण हो।

प०४२—वर्ग—वह आयत है जिसकी दो समीपी भुजा बराबर हों

प० ४३—समलम्ब चतुर्भुज—वह चतुर्भुज है जिसकी कोई सी दो सामने की भुजा समानान्तर हों।

प० ४४—समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज—वह समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी असमानान्तर भुजा बराबर हों।

प० ४५—किसी सीधी रेखा का चातुरस्त्रिक विक्षेप लम्बों से कटा हुआ वह मध्यवर्ती भाग है जो सीधी रेखा के सिरों से किसी दूसरी अपरिमित रेखा पर डालने से पैदा हुआ हो।

जैसे आकृति १ और २ में अ ब का चातुरस्त्रिक विक्षेप स द पर ल क रेखा है।

आकृति १

आकृति २

साध्य २२—प्रमेयोपपाद्य

(रे०—सा० ३४ अ०)

साधारण प्रतिज्ञा (अ)—प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज की आमने सामने की भुजा और कोण बराबर होते हैं, और प्रत्येक कर्ण उसको दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स द एक ▱ है, जिसके अ स, ब द कर्ण हैं;

तो सिद्ध करना है कि

अ ब = स द, अ द = स ब
<ब अ द = <द स ब; < अ ब स = <स द अ
और अ स, ब द प्रत्येक कर्ण अ ब स द
▭ के समद्विभाग करेगा।

उपपत्ति—∵ अ ब ॥ द स की है (कल्पना)

और ब द उनको काटती है

∴ <अ ब द = एकान्तर <स द ब (सा० ६ प्र० (अ))

फिर ∵ अ द ॥ ब स की है (कल्पना)

और ब द उनको काटती है

∴ <अ द ब = एकान्तर < स ब द (सा० ६ प्र० (अ))

इसलिए अ ब द और स द ब दो △ में

< अ ब द = <स द ब
< अ द ब = <स ब द
और ब द उभयनिष्ठ है

∴ △अ ब द ≡ <स द ब (सा० ११ प्र०)

इसलिए
अ ब = स द, अ द = स ब
<ब अ द = <द स ब
ब द रेखा से ▭ के तुल्य दो भाग हो गये।

इसी प्रकार, अ स कर्ण की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं कि

{ अ ब = स द, अ द = स ब
< अ ब स = < स द अ
अ स रेखा अ ब स द □ के तुल्य दो भाग करती है।

यही सिद्ध करना था।

साधारण प्रतिज्ञा (ब)—समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे के समद्विभाग करते हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब स द □ के कर्ण एक दूसरे को म पर काटते हैं;

तो सिद्ध करना है कि

{ अ म = म स
द म = म ब

उपपत्ति—अ म द और स म ब दो △ में

∵ { < अ द ब = एकान्तर < स ब द (सा० ६—प्र० (अ))
< अ म द = सन्मुख < स म ब (सा० ३—प्र०)
अ द = स ब (सा० २२—प्र० अ)

∴ △ अ म द ≡ △ स म द (सा० ११—प्र०)

इसलिए { अ म = म स
द म = म ब

यही सिद्ध करना था।

अनु० १—यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज की दो समीपी भुजा बराबर हों तो सब भुजा आपस में बराबर होती हैं।

अनु० २—यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण हो तो सब कोण समकोण होंगे।

अनु० ३—समानान्तर सीधी रेखा प्रत्येक स्थान पर बराबर दूरी पर होती हैं।

अभ्यास

१—जिस चतुर्भुज की आमने सामने की भुजा = हों, वह अवश्य □ होगा।

२—जिस चतुर्भुज के आमने सामने के < = हों वह अवश्य □ होगा।

३—□ जिसके कर्ण बराबर हों वह आयत होगा।

४—यदि अ ब स द □ का कर्ण अ स < द अ ब के समद्विभाग करे तो वह < द स ब के भी समद्विभाग करेगा।

५—किसी समानान्तर चतुर्भुज की आमने सामने के भुजाएं बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा बाक़ी भुजाओं की ‖ होगी।

६—एक △ के कोणों के बिन्दुओं से सन्मुख भुजाओं की ‖ खींची गई हैं, तो सिद्ध करो कि इस प्रकार जो नया △ बनेगा वह वास्तविक △ का चौगुना होगा।

७—विषमकोण सम चतुर्भुज के कर्ण जिन कोणों में होकर जाते हैं उनको समद्विभाग करते हैं।

८—यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे के समद्विभाग करें तो वह □ होगा।

९—विषमकोण सम चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को ⊥ पर काटते हैं।

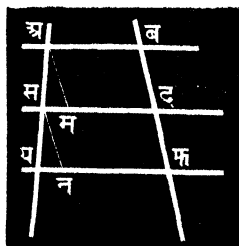
१०—वर्ग के कर्ण = होते हैं और एक दूसरे को ⊥ पर काटते हैं।

११—यदि एक आयत और एक △ एकही आधार पर और एकही ऊँचाई के हों तो आयत का क्षेत्रफल △ के क्षेत्रफल से दूना होगा।

१२—△ अ ब स की मध्यगत रेखा अ द को य तक इतना बढ़ाया गया है कि द य = अ द है और य को ब और स से मिलाया गया है; सिद्ध करो कि अ ब य स एक ▱ है।

१३—एकही सीधी रेखा पर = और ॥ सीधी रेखाओं के चातुरस्त्रिक विक्षेप = होते हैं।

साध्य २३-प्रमेयोपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—यदि तीन या अधिक सीधी रेखाएँ समानान्तर हों, और उनके काटने वाली किसी रेखा के मध्यस्थ भाग आपस में बराबर हों तो किसी और काटनेवाली रेखा के संगती मध्यस्थ भाग भी आपस में बराबर होंगे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब, स द, य फ, ॥ सीधी रेखाओं को अ स य और ब द फ सीधी रेखा काटती हैं और मध्यस्थ भाग अ स = मध्यस्थ भाग स य;

तो सिद्ध करना है कि

मध्यस्थ भाग ब द = मध्यस्थ भाग द फ होगा।

बनावट—मान लो कि अ म, स न में से प्रत्येक ब फ की ॥ खींची गई है जो स द और य फ के बिन्दुओं म और न पर क्रम से मिलती हैं।

उपपत्ति— ∵ स द ॥ य फ की है (कल्पना)

∴ ∠अ स म = संगती ∠ स य न (सा० ६ (ब) प्र०)

फिर ∵ अ म ॥ स न की है (सा० ७ प्र०)

∴ ∠ स अ म = संगती ∠ य स न (सा० ६ (ब) प्र०)

∴ अ स म और स य न दो △ में

∠अ स म = ∠स य न
∠स अ म = ∠य स न
अ स = स य (कल्पना)

इसलिए △ अ स म ≡ △ स य न (सा० ११ प्र०)

∴ अ म = स न

किन्तु अ म = ब द क्योंकि अ ब द म ▱ है (सा० २२ (अ) प्र०)

और स न = द फ क्योंकि स द फ न ▱ है (सा० २२ (अ) प्र०)

∴ ब द = द फ।

यही सिद्ध करना था।

अनु० १—किसी त्रिभुज के किसी भुजार्द्ध बिन्दु से जो सीधी रेखा आधार की समानान्तर खींची जायगी वह बाकी भुजा के भी समद्विभाग करेगी।

अनु० २—त्रिभुज की भुजाओं के समद्विभाग करके जो रेखा मिलाई जायगी वह आधार की समानान्तर होगी।

अभ्यास

१—अ ब, स द, य फ, तीन सीधी रेखा हैं जो किसी काटनेवाली रेखा से मध्यस्थ भाग बराबर बनाती हैं; सिद्ध करो कि अ ब, स द, य फ ॥ हैं।

२—सब सीधी रेखाओं के, जो किसी △ के शीर्षकोण से आधार के बिन्दुओं तक खींची जावेंगी, उस सीधी रेखा से समद्विभाग होंगे जो △ की भुजाओं के अर्द्धक बिन्दुओं को मिलाती है।

३—अ ब स △ की भुजा ब स, स अ और अ ब के द, य, फ, बिन्दुओं पर समद्विभाग किये गये हैं, सिद्ध करो कि ब फ य द, स फ य द और अ य द फ □ हैं।

४— △ की भुजाओं के अर्द्धक बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा = $\frac{१}{२}$ आधार के होती है।

५—प्रत्येक त्रिभुज की मध्यगत रेखा एक बिन्दु पर मिलती हैं।

इस बिन्दु को △ का गुरुत्वकेन्द्र कहते हैं।

हल—मान लो कि △ अ ब स की ब य, स फ मध्य गत रेखाओं का ज कटानबिन्दु है,

अ ज को मिलाकर, ह तक बढ़ाओ और ज ह = अ ज बनाओ,

ब ह और स ह को मिलाओ,

तो ज य ॥ ह स के हुई (सा० २१ प्र० का अनुमान २)

और फ ज ॥ ब ह के हुई (सा० २१ प्र० का अनुमान २)

∴ ज ब ह स □ हुआ

और अ ह, ब स के अर्द्धक बिन्दु से होकर आती है (सा० २२ प्र०)

निधि का वर्णन

इस बात की भावना करो कि एक स्थिर बिन्दु से, दृढ़ अन्तर पर कोई बिन्दु चल रहा है। प्रकट है कि इसका मार्ग एक वृत्त की परिधि होगा, जिसका केन्द्र स्थिर बिन्दु और अर्द्ध व्यास दृढ़ अंतर होगा। इस वृत्त की परिधि पर के सब बिन्दुओं को छोड़ और कोई बिन्दु इस स्थिर बिन्दु से दृढ़ अन्तर पर नहीं हो सकते। इसी बात को हम यों कहा करते हैं कि इस वृत्त की परिधि,—दिये हुए नियम के अनुसार वाले बिन्दु का निधि है।

इसी प्रकार, दी हुई सीधी रेखा से एक दृढ़ अन्तर पर किसी चलने वाले बिन्दु का निधि हम समझ सकते हैं, कि वह दो सीधी रेखा होंगी जो दी हुई सीधी रेखा की दोनों ओर स्थित होंगी और उनकी समानान्तर भी होंगी; इसलिए—

प० ४६—यदि किसी एक रेखा या कई रेखाओं पर का बिन्दु प्रत्येक दिये हुए नियम को पूरा करे और कोई दूसरा बिन्दु पूरा न करे तो इस रेखा या रेखाओं को इस बिन्दु का इस विचार से कि वह नियत नियम को पूरा करता है निधि कहेंगे।

अभीष्टनिधि के सिद्ध करने में यह दिखलाना आवश्यक है किः—

(१) प्रत्येक बिन्दु जो दिये हुए नियम को पूरा करता है वह कल्पित निधि पर स्थित होता है।

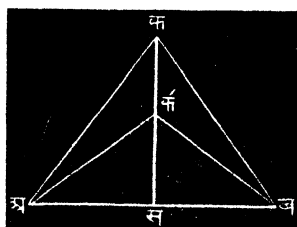
(२) कल्पित निधि पर का प्रत्येक बिन्दु दिये हुए नियम को पूरा करता है।

यदि एक बिन्दु का निधि दूसरे बिन्दु के निधि को काटे तो काटनेवाले निधियों का बिन्दु—अथवा के बिन्दु—आवश्यक है कि प्रत्येक निधि के नियम को पूरा करें। इस क्रिया से किसी ऐसे बिन्दु के जान लेने की प्रणाली ज्ञात

होती है जो दो नियमों को पूरा कर सके। जैसे, कल्पना करो कि अ और ब दो दिये हुए बिन्दुओं से एक इंच के अन्तर पर कोई बिन्दु ज्ञात करना चाहते हैं; यदि ऐसा बिन्दु हुआ तो वह उन दो वृत्तों के कटने के स्थान पर स्थित होगा जो अ और ब को क्रम से केन्द्र मान कर और एक इंच अर्द्ध-व्यास लेकर खींचे जावें। अब संभव है कि ऐसे बिन्दु दो हों या एक ही हो या एक भी न हो जैसे यह वृत्त एक दूसरे को काटें या स्पर्श करें या एक दूसरे के पूर्णतया बाहर रहें।

किसी निधि या निधि के भाग की आकृति ज्ञात करनी हो तो हमको चाहिए कि पास पास के उन बिन्दुओं को जो दिये हुए नियम को पूरा करते हैं एक अनवच्छिन्न रेखा से मिलावें। इस क्रिया को निधि का स्थापन करना कहते हैं।

साध्य २४—प्रमेयोपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—किसी बिन्दु का निधि जो दो स्थिर बिन्दुओं से बराबर दूरी पर हो वह लम्ब होगा जो दोनों बिन्दुओं की मिलानेवाली रेखा के अर्द्धक बिन्दु से खींचा जाय।

मुख्य प्रतिज्ञा (१)—कल्पना करो कि अ और ब दो स्थिर बिन्दु हैं और क कोई बिन्दु है जो अ और ब से बराबर दूरी पर है,

तो सिद्ध करना है कि

अ और ब की मिलानेवाली सीधी रेखा की लम्ब रूप अर्द्धक पर क होगा।

बनावट—मान लो कि अ और ब बिन्दुओं को, अ ब मिलाती है और स बिन्दु इस रेखा के समद्विभाग करता है। क स, क अ और क ब को मिलाओ।

उपपत्ति— ∵ क स अ और क स ब दो △ में

{ स अ = स ब (बनावट)
क स उभयनिष्ठ है
क अ = क ब (कल्पना)

∴ < क स अ = < क स ब (सा० १४ – प्र०)

अर्थात् अ, ब बिन्दुओं की मिलानेवाली सीधी रेखा के लम्ब रूप अर्द्धक पर क स्थित है।

मुख्य प्रतिज्ञा (२)—कल्पना करो कि अ और ब दो स्थिर बिन्दु हैं और क′ कोई बिन्दु है जो अ और ब को मिलाने वाली सीधी रेखा के लम्ब रूप अर्द्धक क′ स पर स्थित है।

तो सिद्ध करना है कि

अ और ब बिन्दुओं से क′ बराबर दूरी पर होगा।

बनावट—क′ अ और क′ ब को मिलाओ।

उपपत्ति— ∵ क′ स अ और क′ स ब दो △ में

{ स अ = स ब (कल्पना)
क′ स उभयनिष्ठ है
< क′ स अ = < क′ स ब (कल्पना)

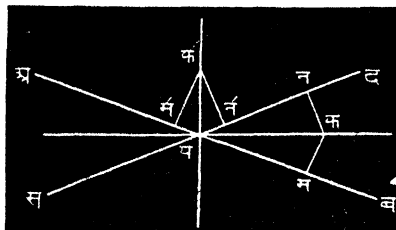
∴ क′ अ = क′ ब (सा० १० प्र०)

अर्थात् अ और ब बिन्दुओं से क′ समान अन्तर पर है।

इसलिए अभीष्टनिधि, अ ब का लम्बरूप अर्द्धक हुआ।

यही सिद्ध करना था।

साध्य २५—प्रमेयोपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—किसी बिन्दु का निधि जो दो परस्पर काटने वाली रेखाओं से बराबर दूरी पर हो, ऐसी दो सीधी रेखा होंगी जो दी हुई रेखाओं के बीच के कोणों के तुल्य दो भाग करें।

मुख्य प्रतिज्ञा (१)—कल्पना करो कि अ य ब और स य द दो परस्पर काटनेवाली सीधी रेखा हैं और क कोई बिन्दु है जो इनसे बराबर अन्तर पर है;

तो सिद्ध करना है कि

अ य ब और स य द के बीच के कोणों की अर्द्धक रेखाओं में से किसी एक पर क होगा।

बनावट—मान लो कि अ य ब और स य द पर क्रम से क म और क न ⊥ डाले गये हैं,

क य को मिलाओ।

उपपत्ति—∵ क य म और क य न दो △ में

$$\begin{cases} \text{क म} = \text{क न} & \text{(कल्पना)} \\ \text{क य उभयनिष्ठ है} & \\ \perp \text{क म य} = \text{क न य} \perp \text{के} & \text{(बनावट)} \end{cases}$$

∴ < क य म = < क य न (सा० १२—प्र०)

अर्थात् अ य ब और स य द के बीच के कोणों की अर्द्धक रेखाओं में से एक पर क हुआ।

मुख्य प्रतिज्ञा (२)—कल्पना करो कि अ य ब और स य द दो परस्पर काटनेवाली सीधी रेखा हैं और क′ इन रेखाओं के बीच के कोणों की अर्द्धक में से एक क′ य पर स्थित है।

तो सिद्ध करना है कि

क′, अ य ब और स य द से बराबर अन्तर पर होगा

बनावट—मान लो कि क′ म′ और क′ न′ क्रम से अ य ब और स य द रेखाओं पर ⊥ डाले हुए हैं।

उपपत्ति—∵ क′ य म′ और क′ य न′ दो △ में

<क′ य म′ = <क′ य न′ (कल्पना)
क′ म′ य ⊥ = क′ न′ य ⊥ (बनावट)
क′ य उभयनिष्ठ है

∴ क′ म′ = क′ न′ (सा० ११—प्र०)

अर्थात् अ य ब और स य द से क′ बराबर अन्तर पर हुआ इसलिए अभीष्टनिधि अ य ब और स य द रेखाओं के बीच के कोणों की दोनों अर्द्धकों पर स्थित हुआ।

यही सिद्ध करना था।

अभ्यास

१—किसी बिन्दु का निधि, किसी स्थिर सीधी रेखा से दत्त अन्तर पर दो रेखा होती हैं जो स्थिर रेखा की ॥ होंगी।

२—किसी बिन्दु का निधि जो दो स्थिर ॥ सीधी रेखाओं से बराबर अन्तर पर हो एक रेखा होगी, जो इन रेखाओं में से प्रत्येक की ॥ होगी।

३—किसी △ के शीर्षकोण का निधि—जिसका कि आधार दिया हुआ है और दी हुई लम्बाई के आधार की अर्द्धक मध्यगत रेखा ज्ञात है—एक ⊙ होगा।

४—दिये हुए अर्द्धव्यास के ⊙ के केन्द्र का निधि ज्ञात करो जो एक दिये हुए ⊙ की परिधि के भीतर घूमता है।

५—दिये हुए ⊙ के अर्द्धव्यासों पर के बिन्दुओं का निधि ज्ञात करो जो केन्द्र से बराबर दूरी पर स्थित है।

६—एक स्थिर बिन्दु से, दी हुई दिशा के सब बिन्दुओं का निधि, ज्ञात करो।

७—दिये हुए आधार पर कई समद्विबाहु त्रिभुज बने हुए हैं, तो इनके शीर्षकोण का निधि ज्ञात करो।

निधियों का परस्पर कटान

८—एक दी हुई सीधी रेखा में ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो दो दिये हुए बिन्दुओं से समान अन्तर पर हो। बताओ किस दशा में ऐसे बिन्दु का होना असम्भव है?

९—एक दी हुई सीधी रेखा में ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो दो दी हुई सीधी रेखाओं से समान अन्तर पर हो, सिद्ध करो कि साधारणतः ऐसे दो बिन्दु होंगे, बताओ किस दशा में केवल एक ही बिन्दु होगा और कब एक भी न होगा?

१०—एक दी हुई सीधी रेखा में ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो एक दिये हुए बिन्दु से दिये हुए अन्तर पर हो; सिद्ध करो कि ऐसे दो बिन्दुओं का होना सम्भव है। बताओ कि कब एक बिन्दु भी ऐसा न होगा?

११—एक दी हुई सीधी रेखा में ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो दी हुई सीधी रेखा से दिये हुए अन्तर पर हो; सिद्ध करो कि सम्भव है कि ऐसे दो बिन्दु हों, कब एक बिन्दु भी ऐसा न होगा?

१२—एक स्थिर बिन्दु से दिये हुए अन्तर पर ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो दो और स्थिर बिन्दुओं से समान अन्तर पर हो; सिद्ध करो कि ऐसे दो बिन्दु होने सम्भव हैं; कब एक बिन्दु भी ऐसा न होगा?

१३—दिये हुए बिन्दु से दिये हुए अन्तर पर और दो दी हुई ‖ सीधी रेखाओं से बराबर अन्तर पर जो बिन्दु हो उसको ज्ञात करो;

सिद्ध करो कि ऐसे दो बिन्दु होने सम्भव हैं, कब एक बिन्दु भी ऐसा न होगा ?

१४—तीन बिन्दुओं से जो एक सीधी रेखा में नहीं हैं बराबर बराबर दूरी पर जो बिन्दु हो उसे ज्ञात करो।

१५—△ की भुजाओं से बराबर दूरी पर जो बिन्दु हो उसे ज्ञात करो; सिद्ध करो कि ऐसे चार बिन्दु होंगे।

१६—एक स्थिर बिन्दु से दिये हुए अन्तर पर और दो दी हुई सीधी रेखाओं से समान अन्तर पर का बिन्दु ज्ञात करो सिद्ध करो कि ऐसे चार बिन्दु होने सम्भव हैं; ऐसे दो बिन्दु कब होंगे, और कब ऐसा कोई भी बिन्दु न होगा ?

१७—दो दी हुई सीधी रेखाओं से समान अन्तर पर और एक दूसरी दी हुई रेखा से दिये हुए अन्तर पर का बिन्दु ज्ञात करो; सिद्ध करो कि साधारणतः ऐसे चार बिन्दु होंगे, कब ऐसे केवल दो बिन्दु होंगे और कब एक भी न होगा ?

निधियों का स्थापन

१८—उन सीधी रेखाओं के अर्द्धक बिन्दुओं के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे जोकि एक दिये हुए बिन्दु से एक स्थिर ⊙ की परिधि पर के बिन्दुओं तक खींची गई हैं ?

१९—उन बिन्दुओं के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे, जो एक दिये हुए बिन्दु और एक दी हुई सीधी रेखा से बराबर बराबर अन्तर पर स्थित हैं ?

२०—उन बिन्दुओं के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे जो दी हुई सीधी रेखा से जितने अन्तर पर हैं उससे दूने अन्तर पर एक दिये हुए बिन्दु से हैं ?

२१—उन बिन्दुओं के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे जो एक बिन्दु से जितने अन्तर पर हैं उससे दूने अन्तर पर दूसरे बिन्दु से हैं ?

२२—उस बिन्दु के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे जो इस प्रकार चक्कर करता है कि दो दिये हुए बिन्दुओं से उसके अन्तरों का योग दृढ़ रहता है ?

२३—उस बिन्दु के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे, जो इस प्रकार चक्कर करता है कि दो दिये हुए बिन्दुओं से उसकी दूरियों का अन्तर दृढ़ रहता है ?

२४—उस बिन्दु के निधि की क्योंकर स्थापना करोगे, जो इस प्रकार चक्कर करता है कि उसका अन्तर ⊥ पर दो परस्पर काटने वाली सीधी रेखाओं में से एक से जितना है, उससे दूना अन्तर दूसरी से है ?

क्रियात्मक प्रकरण

भूमिका

भूमिति सम्बन्धी आकृतियों के बनाने के लिए लोगों ने सैकड़ों यन्त्र निकाले हैं, जैसे—प्रोट्रैक्टर, सेट-स्क्वेयर और समानान्तर रूलर। प्रत्येक यन्त्र से एक विशेष काम लिया गया है; किन्तु अब यह ज्ञात हुआ है कि परकार और (बिना अंशों की) पटरी से, प्रायः सभी सरल आकृति बन सकती हैं। भूमिति के जानने वाले भूमिति की वस्तूपपाद्य साध्यों के बनाने में इन्हीं दोनों यन्त्रों के प्रयोग पर सन्तोष करते हैं, जैसा कि अवाध्योपक्रमों से जो इस विषय के आरम्भ में दिये गये हैं स्पष्ट है।

भूमिति की प्रत्येक वस्तूपपाद्य साध्य में दो बातें होती हैं:—एक आकृतियों के ठीक ठीक खींचने का अभ्यास, दूसरे शुद्ध शुद्ध तर्कना करने की टेव; और इसलिए विद्यार्थियों को चाहिये कि जहाँ कहीं सम्भव हो अपने फलों के शुद्ध होने की जाँच नापकर कर लिया करें।

जिन रेखाओं को ज्ञात किया है वह मोटी होनी चाहिएँ, जो दी हुई रेखा हैं वह कुछ कम मोटी होनी चाहिएँ, बनावट वाली रेखा पतली और जिन रेखाओं की केवल उपपत्ति में आवश्यकता पड़ती है उनको बिन्दुयुक्त बनाना चाहिए।

वस्तूपपाद्य साध्यों के सिद्ध करने के लिए कोई रीति नियत नहीं है और इसी बात में भूमिति का एक अभ्यास अङ्कगणित के घन मूल निकालने और बीजगणित के द्वितीय श्रेणी के समीकरण तोड़ने से नहीं मिलता। इसमें सन्देह नहीं कि निधियों के परस्पर कटने से एक विशेष भाँति की वस्तूपपाद्य साध्य के सिद्ध करने में सहायता मिलती है; किन्तु जब इसमें

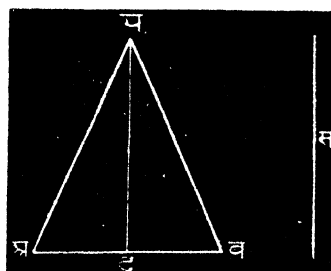
सफलता नहीं होती तो हमको एक दूसरी प्रणाली से उसके सिद्ध करने का लाभदायक संकेत मिल जाता है; इस प्रणाली का नाम **विवेचना** है। इस प्रणाली में हम अभीष्ट आकृति की बनावट की कल्पना कर लेते हैं और फिर उसके गुणों पर सावधानी से विचार करते हैं और यह देख कर कि इसके भिन्न भिन्न भाग आपस में किस प्रकार आबद्ध हैं, हमको प्रायः सम्पूर्ण आकृति के बनाने का पता वस्तूपपाद्य साध्य के निर्दिष्ट से लग जाता है और केवल अवाध्योपक्रम और उन क्रियाओं से जिनको कि सिद्ध कर चुके हैं, सम्पूर्ण आकृति को बना लेते हैं। ठीक ऐसी ही प्रक्रिया वह मनुष्य करेगा जो घड़ी बनाना चाहता हो; परन्तु उसके यन्त्र की पहिली जानकारी बहुत ही थोड़ी रखता हो या कुछ भी न रखता हो। ऐसा मनुष्य पहिले एक पुरानी घड़ी को लेगा, उसके पुर्ज़ों को अलग अलग करेगा, प्रत्येक भाग को ध्यान देकर देखेगा, और इस बात की ओर ध्यान रक्खेगा कि वह किस प्रकार से आपस में आबद्ध थे और फिर घड़ी को दुबारा बनायेगा।

पुर्ज़ों का अलग करना **विवेचना** कहलाता है और उनको परस्पर आबद्ध करना **पर्य्यालोचना** कहलाता है।

यद्यपि विवेचना का प्रयोग, प्रमेयोपपाद्य साध्यों के सिद्ध करने में भी हो सकता है; किन्तु वस्तूपपाद्य साध्यों के सिद्ध करने में यह अधिक लाभदायक है।

बहुधा दो या अधिक आकृतियों का बनाना सम्भव होता है जो एक ही नियमों को पूरा करती हैं; किन्तु और दशाओं में एक दूसरी से भिन्न हों। ऐसी वस्तूपपाद्य जिनके दो या अधिक विवरण सम्भव हों **अपरिमित** कहलाती हैं।

विवेचना प्रणाली द्वारा निकाले हुए उदाहरण

उदाहरण १—एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ जिसका कि आधार और लम्ब ज्ञात हैं।

कल्पना करो कि अ ब दिया हुआ आधार है और स दिया हुआ लम्ब है।

विवेचना—मान लो कि अ ब य ही अभीष्ट △ है;

इसका लम्ब य द खींचो।

∵ य द समद्विबाहुत्रिभुज का लम्ब है (बनावट)

∴ अ द य और ब द य दो △ में

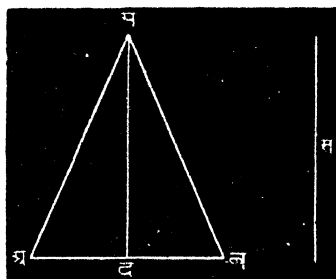
{ अ य = ब य (कल्पना)
{ द य उभयनिष्ठ है
{ समकोण अ द य = समकोण ब द य

∴ △ अ द य ≡ △ ब द य (सा० १४—प्र०)

∴ द अ = द ब

और इससे ज्ञात हुआ कि

पर्य्यालोचना—अ ब के द पर समद्विभाग करो, (सा० २—ब०)

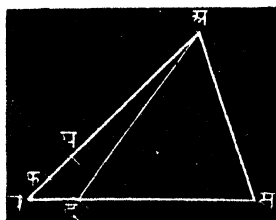
द से अ ब के साथ द य रेखा ⊥ बनाती हुई खींचो, (सा० ३—ब०)

द य = स य बनाओ,
अ य और ब य को मिलाओ;
तो अ ब य △ अभीष्ट होगा।

उपपत्ति— ∵ अ द य और ब द य दो △ में

{ अ द = ब द (बनावट)
{ द य उभयनिष्ठ है
{ बीच का < अ द य = बीच का < ब द य (बनावट)

∴ अ य = ब य (सा० १० प्र०)

अर्थात् समद्विबाहु △ बन गया जिसका आधार और लम्ब अभीष्ट लम्बाई के हैं।

उदाहरण २—अ ब स त्रिभुज के ब स आधार में कोई द बिन्दु ऐसा ज्ञात करो कि अ द = ½ (अ ब + अ स)

कल्पना करो कि अ ब स दिया हुआ △ है।

विवेचना—मान लिया कि द अभीष्ट बिन्दु है।

द अ को मिलाओ।

∵ अ द = ½ (अ ब + अ स) कल्पना)

∴ अ द = अ फ, जब कि ब य का अर्द्धक बिन्दु फ हो और अ य = अ स हो,

इससे पता चलता है कि—

पर्य्यालोचना—△ अ ब स की अ ब और अ स दो भुजाओं में से अ ब जो बड़ी है उसमें से अ य = अ स के काटो,

ब य के फ बिन्दु पर तुल्य दो भाग करो। (सा० २ ब०)

अ को केन्द्र मान कर और अ फ के बराबर अर्द्ध व्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो ब स को द पर काटे,

तो द अभीष्ट बिन्दु होगा।

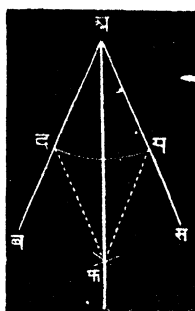
उपपत्ति—सरल है।

वस्तूपपाद्य साध्य

रेखाओं और कोणों का वर्णन

साध्य १–वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० ६ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—एक दिये हुए कोण के तुल्य दो भाग करो ।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि ब अ स दिया हुआ < है;
तो < ब अ स के तुल्य दो भाग करने हैं ।

बनावट—अ को केन्द्र मानकर किसी अर्द्धव्यास पर एक ⊙ खींचो जो अ ब और अ स को क्रम से द और य पर काटे;
द और य को केन्द्र मानकर ऐसे बराबर ⊙ खींचो जो < ब अ स के भीतर एक दूसरे को फ पर काटें ;
अ फ को मिलाओ;

तो अ फ, कोण ब अ स के तुल्य दो भाग करेगी।

उपपत्ति—द फ और य फ को मिलाओ;

∵ द अ फ और य अ फ दो △ में

$\begin{cases} \text{द अ = य अ} & \text{(बनावट)} \\ \text{अ फ उभयनिष्ठ है} & \\ \text{फ द = फ य} & \text{(बनावट)} \end{cases}$

∴ △ द अ फ ≡ △ य अ फ (सा०—१४ प्र०)

∴ < द अ फ = < य अ फ।

अर्थात् अ फ से, < ब अ स के तुल्य दो भाग हो गये।

यही करना था।

अभ्यास

१—दिये हुए अधिक कोण को ८ बराबर भागों में विभाजित करो।

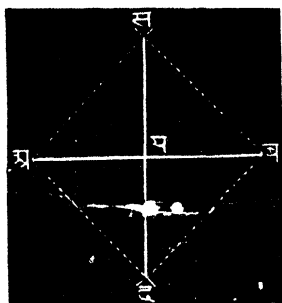
२—दिये हुए < को ऐसे दो भागों में विभाजित करो कि एक भाग दूसरे का एक तिहाई हो।

३—दिये हुए △ में उस बिन्दु को ज्ञात करो जहाँ कोणों की अर्द्धक मिलती हैं।

साध्य २–वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० १० अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—दी हुई परिमित सीधी रेखा को दो बराबर भागों में विभाजित करो।

*

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब दी हुई परिमित सीधी रेखा है;
तो अ ब के तुल्य दो भाग करने हैं।

बनावट—अ और ब को केन्द्र मानकर ऐसे बराबर ⊙ खींचो कि एक दूसरे को स और द पर काटें।

स द को मिलाओ जो अ ब को य पर काटती है,

तो स द, अ ब रेखा के य पर तुल्य दो भाग करेगी।

उपपत्ति—स अ, स ब और द अ, द ब को मिलाओ।

∵ अ स द और ब स द दो △ में

{ अ स = ब स (बनावट)
{ स द उभयनिष्ठ है
{ द अ = द य (बनावट)

∴ △ अ स द ≡ △ ब स द (सा० १४ प्र०)

∴ < अ स द = < ब स द

फिर ∵ अ स य और ब स य दो △ में

{ अ स = ब स (बनावट)
{ स य उभयनिष्ठ है
{ बीच का < अ स य = बीच के < ब स य के (सिद्ध कर चुके हैं)

$\therefore \triangle$ अ स य $\equiv \triangle$ ब स य। (सा० १०—प्र०)

या अ य = ब य ।

अर्थात् स द ने अ ब के य पर तुल्य दो भाग किये ।

यही करना था ।

अभ्यास

१—दी हुई परिमित सीधी रेखा को ४ बराबर भागों में विभाजित करो।

२—दी हुई परिमित सीधी रेखा को ऐसे भागों में विभाजित करो कि एक भाग दूसरे का सात गुना हो।

३—दिये हुए $\triangle$ की भुजाओं की लम्बरूप अर्द्धकों का कटान बिन्दु ज्ञात करो।

४—उस बिन्दु को ढूँढ़ो, जहाँ दिये हुए $\triangle$ की मध्यगत रेखा मिलती हैं।

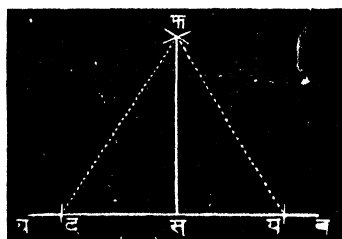
५—दी हुई सीधी रेखा में एक ऐसा बिन्दु ढूँढ़ो, जो दो दिये हुए बिन्दुओं से बराबर अन्तर पर हो; किस दशा में यह असम्भव है ?

६—दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दो दिये हुए बिन्दुओं से बराबर अन्तर पर हो।

७—किसी $\triangle$ के शीर्षकोण से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो आधार के सिरों से बराबर अन्तर पर हो।

साध्य ३—वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० ११ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—दिये हुए बिन्दु से जो एक अपरिमित सीधी रेखा के अन्दर है, एक सीधी रेखा खींचना जो दी हुई सीधी रेखा के साथ समकोण बनावे।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो अ ब दी हुई अपरिमित सीधी रेखा है और स दिया हुआ इसमें बिन्दु है ;

तो स से अ ब पर एक लम्ब खींचना है ।

बनावट—स को केन्द्र मान कर और कोई अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो अ ब को द और य पर काटे, द और य को केन्द्र मानकर ऐसे बराबर वृत्त खींचो कि एक दूसरे को फ बिन्दु पर काटें,

स फ को मिलाओ;

तो स फ, स से अ ब पर लम्ब होगा ।

उपपत्ति—फ द और फ य को मिलाओ ।

∵ द स फ और य स फ दो △ में

स द = स य	(बनावट)
स फ उभयनिष्ठ है	
फ द = फ य	(बनावट)

∴ △ द स फ ≡ △ य स फ (सा० १४ प्र०)

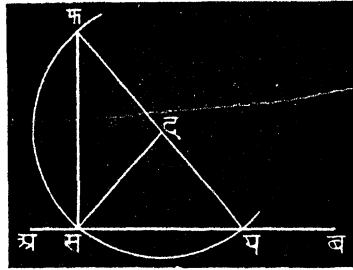
अर्थात् < द स फ = < य स फ

और यह आसन्नकोण हैं

∴ स से अ ब पर स फ लम्ब है ।

यही करना था ।

दूसरी बनावट

(जब कि स बिन्दु, अ ब के सिरे पर या उसके समीप हो)

बनावट—अ ब के बाहर द कोई बिन्दु मान लो,

स द को मिलाओ।

द को केन्द्र मानकर और द स के बराबर अर्द्धव्यास लेकर एक वृत्त खींचो जो अ ब को य पर काटे

य द को मिलाओ।

य द को इतना बढ़ाओ कि ⊙ को फ पर काटे,

स फ को मिलाओ

तो स से अ ब पर स फ लम्ब होगा।

उपपत्ति— ∵ द स = द फ (बनावट)

∴ < द फ स = < द स फ (सा० १२ प्र०)

और ∵ द स = द य (बनावट)

∴ < द य स = < द स य (सा० १२ प्र०)

∴ < द फ स + < द य स = < द स फ + < द स य

= < फ स य

किन्तु < द स फ + < द य स + < फ स य = दो समकोणों के

(सा० ८—प्र०)

∴ < फ स य = एक ⊥

अर्थात् स से अ ब पर स फ लम्ब है।

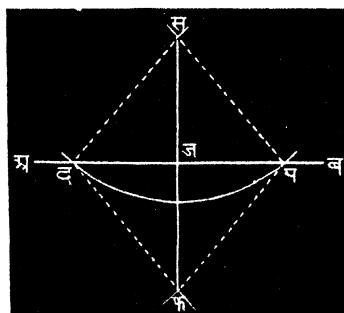
अभ्यास

१—दी हुई परिमित सीधी रेखा के किसी एक सिरे से समकोण बनाती हुई सीधी रेखा खींचो; किन्तु दी हुई सीधी रेखा को बढ़ाओ नहीं।

२—एक समकोण बनाओ और उसको ऐसे दो भागों में विभाजित करो कि एक भाग दूसरे का सातवाँ भाग हो।

साध्य ४—वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० १२ अ०)

साधारण प्रतिज्ञा—दी हुई अपरिमित सीधी रेखा पर दिये हुए बिन्दु से जो उसके बाहर है लम्ब डालना।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब दी हुई अपरिमित सीधी रेखा है और स दिया हुआ बिन्दु है जो उस रेखा के बाहर है।
तो स से अ ब पर लम्ब डालना है।

बनावट—स को केन्द्र मान कर और एक ऐसा अर्द्धव्यास लेकर ⊙ खींचो कि अ ब को द और य पर काटे, द और ब को केन्द्र मानकर ऐसे बराबर ⊙ खींचो, कि एक दूसरे को फ बिन्दु पर काटें,

स फ को मिलाओ जो अ ब को ज पर काटती है,

तो स से स ज, अ ब पर ⊥ होगा।

उपपत्ति—स द, स य, फ द और फ य को मिलाओ

∵ द स फ और य स फ दो △ में

⎧ द स = य स (बनावट)
⎨ स फ उभयनिष्ठ है
⎩ द फ = य फ (बनावट)

∴ △ द स फ ≡ △ य स फ (सा० १४ प्र०)

अर्थात् < द स फ = < य स फ

फिर ∵ द स ज और य स ज दो △ में

⎧ द स = य स (बनावट)
⎨ स ज उभयनिष्ठ है
⎩ बीच का < द स ज = बीच का < य स ज (सिद्ध हो चुका है)

∴ △ द स ज ≡ △ य स ज (सा० १० प्र०)

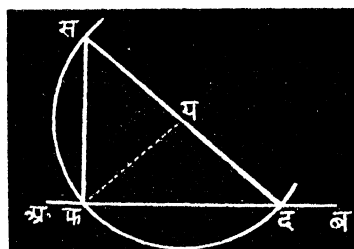
अर्थात् < स ज द = < स ज य

और यह आसन्न < हैं

∴ स से अ ब पर स ज ⊥ है।

यही करना था।

दूसरी बनावट

(जब कि स, अ ब के एक सिरे के सामने या लगभग सामने हो ।)

बनावट—अ ब में कोई बिन्दु द मान लो स द मिलाओ

स द के य पर तुल्य दो भाग करो (सा० २ व०)

य को केन्द्र मानकर और य स के बराबर अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो अ ब को फ पर काटे

स फ को मिलाओ

तो स से अ ब पर, स फ ⊥ होगा ।

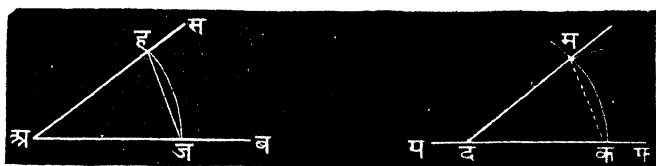
फ य को मिलाओ और जिस प्रकार साध्य ३ वस्तूपपाद्य की दूसरी बनावट में बताया है, इसको सिद्ध करो ।

अभ्यास

१—दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दो दी हुई परस्पर काटनेवाली सीधी रेखाओं के साथ बराबर कोण बनावे ।

साध्य ५—वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० २३ अ० १)

साधारण प्रतिज्ञा—दी हुई सीधी रेखा में एक दिए हुए बिन्दु पर एक कोण बनाओ जो एक दिये हुए कोण के बराबर हो ।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि य फ दी हुई सीधी रेखा में द दिया हुआ बिन्दु है और ब अ स दिया हुआ < है

तो द बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचना है जो य फ के साथ एक < बनावे जो ब अ स < के बराबर हो।

बनावट—अ को केन्द्र मान कर किसी अर्द्धव्यास से एक ऐसा ⊙ खींचो जो अ ब और अ स को क्रम से ज और ह पर काटे

द को केन्द्र मान कर और उसी अर्द्धव्यास से एक ⊙ खींचो जो य फ को क पर काटे

ज ह को मिलाओ

क को केन्द्र मानकर ज ह के बराबर अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो द केन्द्र वाले ⊙ से म पर मिले

द म को मिलाओ

तो < क द म = < ब अ स होगा।

उपपत्ति—क म को मिलाओ

∵ क द म और ज अ ह △ में

{ द क = अ ज (बनावट)
{ द म = अ ह (बनावट)
{ क म = ज ह (बनावट)

∴ △ क द म ≡ ज अ ह (सा० १४—प्र०)

अर्थात् < क द म = < ब अ स।

यही करना था।

अभ्यास

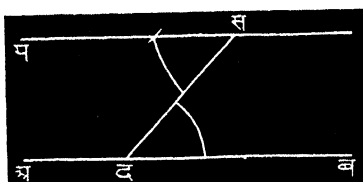
१—अ ब स द एक चतुर्भुज क्षेत्र है, एक दूसरा चतुर्भुज बनाओ जो प्रत्येक दशा में इसके बराबर हो।

२—किसी < की एक भुजा में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो शीर्ष और दूसरी भुजा में के दिये हुए बिन्दु से बराबर अन्तर पर हो।

३—△ अ ब स के आधार ब स या उसके बढ़े हुए भाग में एक बिन्दु द ऐसा ज्ञात करो कि जो अ और स से बराबर अन्तर पर हो।

साध्य ६—वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० ३१ अ०)

साधारण प्रतिज्ञा—दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो एक दी हुई सीधी रेखा की समानान्तर हो।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि स दिया हुआ बिन्दु और अ ब दी हुई सीधी रेखा है;

तो स से सीधी रेखा खींचना है जो अ ब की ॥ हो।

बनावट—अ ब में कोई बिन्दु द ले लो

स द को मिलाओ

स द सीधी रेखा के स बिन्दु पर एकान्तर < द स य = एकान्तर < स द ब बनाओ। (साध्य ५—वस्तूपपाद्य)

तो स य, अ ब की ॥ होगी।

उपपत्ति— ∵ एकान्तर < द स य = एकान्तर < स द ब (बनावट)

∴ स य, अ ब की ॥ हुई (सा० ४—प्र०)

यही करना था।

अभ्यास

१—एक ▱ बनाओ जिसकी दो समीपी भुजा और उनके बीच का कोण दिया हुआ है।

२—एक आयत बनाओ जिसका आधार और ⊥ दिया हुआ है।

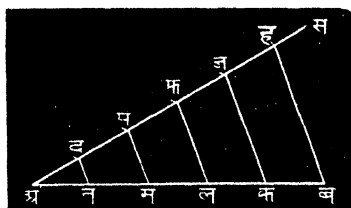
३—एक विषमकोण सम चतुर्भुज बनाओ जिसकी एक भुजा और एक कोण दिया हुआ है।

४—एक वर्ग बनाओ जिसकी एक भुजा दी हुई है। (रे०—सा० ४६ अ०१)

५—एक दिये हुए बिन्दु से एक दी हुई सीधी रेखा तक एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो इसके साथ एक दिए हुए < के बराबर एक < बनावे।

६—अ ब स समकोण △ में अ ब कर्ण है, अ ब में द एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करो कि द ब उस ⊥ के बराबर हो जो द से अ स पर डाला जाय।

साध्य ७—वस्तूपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—दी हुई परिमित सीधी रेखा को कई बराबर भागों में विभाजित करना।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि अ ब दी हुई परिमित सीधी रेखा है; तो इसको कई बराबर भागों (जैसे पाँच) में विभाजित करना है।

बनावट—अ से कोई रेखा अ स, अ ब के साथ कोई < बनाती हुई खींचो

अ स में से किसी लम्बाई के पाँच बराबर भाग अ द, द य, य फ, फ ज और ज ह काट लो ह ब को मिलाओ

द, य, फ, ज से ह ब की ॥ द न, य म, फ ल, ज क रेखाएँ खींचो, जो अ ब में क्रम से न, म, ल और क पर मिलें (सा० ६—व०)

तो भाग अ न = न म = म ल = ल क = क ब होगा।

उपपत्ति— ∵ द न, य म, फ ल, ज क और ह ब ॥ हैं (बनावट)

और अ द = द य = य फ = फ ज = ज ह है (बनावट)

∴ अ न = न म = म ल = ल क = क ब। (सा० २३—प्र०)

यही करना था।

अभ्यास

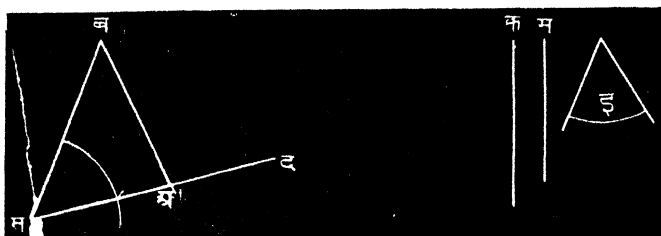
१—दी हुई परिमित सीधी रेखा के समत्रिभाग करो।

२—किसी लम्बाई की परिमित सीधी रेखा खींच कर उसको ७ = भागों में विभाजित करो।

३—एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दी हुई परिमित सीधी रेखा की $\frac{2}{5}$ हो।

त्रिभुजों का वर्णन

साध्य ८—वस्तूपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—एक त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजाएँ और बीच का कोण दिया हुआ है।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि क और म दो दी हुई सीधी रेखा हैं और इ दिया हुआ < है;

तो एक △ बनाना है जिसकी दो भुजा क्रम से क और म के = हों और बीच का < = < इ हो।

बनावट—स ब कोई सीधी रेखा = क के खींचो स ब सीधी रेखा में स से < ब स द = < इ के बनाती हुई सीधी रेखा खींचो (सा० ९ ब०)

स द में से म के = स अ भाग काटो

ब अ को मिलाओ

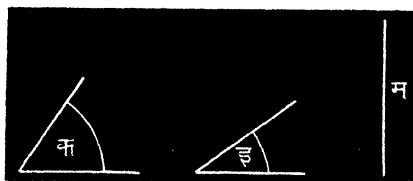
तो अ ब स अभीष्ट △ होगा।

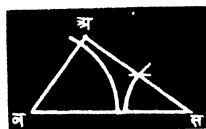
उपपत्ति— ∵ { स ब = क (बनावट)
स अ = म (बनावट)
< ब स अ = < इ (बनावट) }

∴ अ ब स अभीष्ट △ हुआ

यही करना था।

साध्य ९—वस्तूपपाद्य

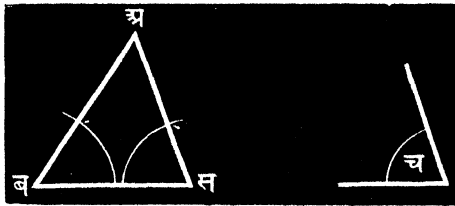
साधारण प्रतिज्ञा—एक त्रिभुज बनाओ जिसके दो कोण और एक भुजा ज्ञात हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि क और इ दो दिये हुए कोण हैं जो मिल कर दो समकोणों से छोटे हैं और म दी हुई सीधी रेखा है;

तो एक ऐसा △ बनाना है जिसके दो < क्रम से क और इ के = हों और एक भुजा = म हो।

आकृति १

बनावट (१)—म के = ब स कोई सीधी रेखा खींचो (आकृति–१)
ब स सीधी रेखा के ब बिन्दु पर < स ब अ = < क बनाओ (सा० ५—ब०)

ब स सीधी रेखा के स बिन्दु पर और उसी ओर जिस ओर कि, < स ब अ स्थित है < ब स अ = < इ बनाओ (सा० ५—ब०)

तो अ ब स अभीष्ट △ होगा

उपपत्ति— ∵ { ब स = म (बनावट)
< स ब अ = < क (बनावट)
< ब स अ = < इ (बनावट)

∴ अ ब स अभीष्ट △ हुआ।

आकृति २

बनावट (२)—म के बराबर कोई ब स सीधी रेखा खींचो (आकृति—२) ब स सीधी रेखा के ब बिन्दु पर <स ब अ = <क बनाओ (सा० ४ व०)

कल्पना करो कि च ऐसा < है कि <च + <क + <इ = दो समकोणों के हैं

ब स सीधी रेखा के स बिन्दु पर और उस की उस ओर जिस ओर < स ब अ स्थित है <ब स अ = <च बनाओ (सा० ४ व०)

तो अ ब स अभीष्ट △ होगा।

उपपत्ति—∵ <ब स अ + <स ब अ + <ब अ स = दो समकोणों के (सा० ८ प्र०)

∴ <च + <क + <ब अ स = दो समकोणों के

किन्तु; <च + <क + <इ = दो समकोणों के

∴ <ब अ स = <इ

पस △ अ ब स में

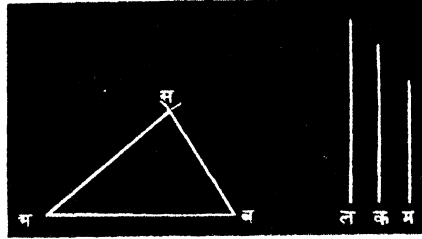
{ ब स = म
<स ब अ = <क
<ब अ स = <इ

∴ अ ब स अभीष्ट △ हुआ।

यही करना था।

साध्य १०—वस्तूपपाद्य

(रे०—सा० २२ श्र० १)

साधारण प्रतिज्ञा—एक त्रिभुज बनाश्रो जिसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि ल, क, म तीन दी हुई सीधी रेखा हैं जिनमें से कोई सी दो मिल कर तीसरी से बड़ी हैं,

तो एक △ ऐसा बनाना है जिसकी भुजाएँ क्रम से ल, क, म के = हों।

बनावट—ल के बराबर कोई सीधी रेखा श्र ब खींचो

श्र को केन्द्र मान कर क के = अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो

ब को केन्द्र मान कर म के = अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो

मान लो कि यह दोनों वृत्त एक दूसरे को स पर काटते हैं

श्र स, ब स को मिलाश्रो

तो श्र ब स श्रभीष्ट △ होगा।

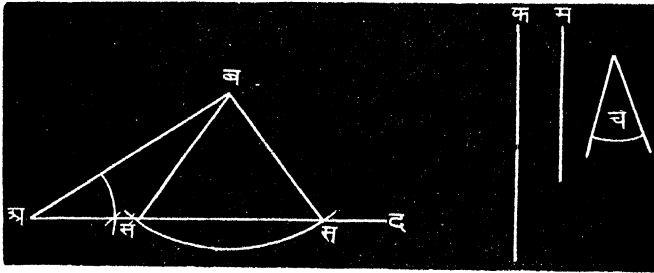
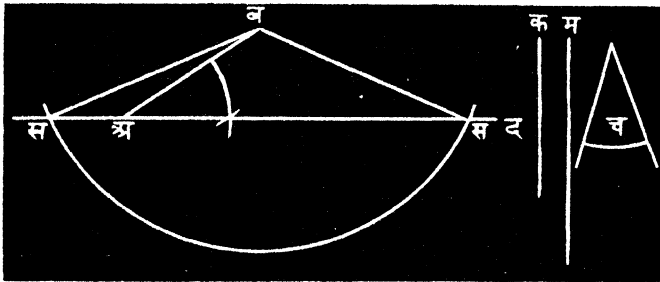
उपपत्ति—∵ { श्र ब = ल (बनावट)
श्र स = क (बनावट)
ब स = म (बनावट) }

∴ श्र ब स श्रभीष्ट △ हुश्रा।

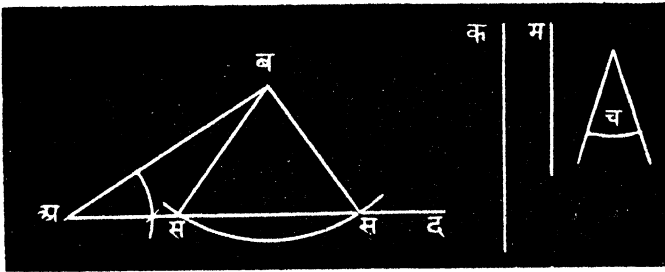
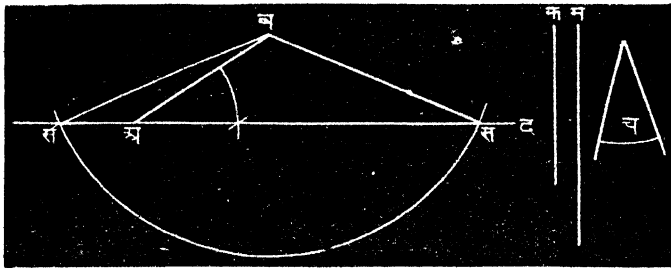
यही करना था।

साध्य ११—वस्तूपपाद्य

(संशयात्मक दशा)

साधारण प्रतिज्ञा—एक त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजा और इनमें से एक के सामने का कोण ज्ञात है।

आकृति १

आकृति २

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि क और म दो दी हुई सीधी रेखा हैं और च दिया हुआ < है;

तो एक △ बनाना है जिसकी दो भुजा क्रम से क और म के = हों और इनमें से एक के सामने का <, (जैसे क के सामने का <) दिये हुए < च के = हो।

आकृति १

आकृति २

बनावट—म के बराबर कोई सीधी रेखा अ ब खींचो अ ब सीधी रेखा के अ बिन्दु पर <ब अ द= <च बनाओ (सा० ४—व०)

ब को केन्द्र मान कर क के=अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो द अ या द अ के बढ़े हुए भाग को स, स′ दो बिन्दुओं पर काटे,

ब स, ब स′ को मिलाओ

दशा (१)—कल्पना करो कि स, स′ दोनों अ की एकही ओर स्थित हैं जैसा कि आकृति १ से प्रकट है

तो △ अ ब स और △ अ ब स′ अभीष्ट △ होंगे।

दशा (२)—कल्पना करो कि स, और स′, अ के आमने सामने की दिशाओं में हैं जैसा कि आकृति २ से प्रकट है

तो अ ब स अभीष्ट △ होगा

उपपति—∵ आकृति १ और २ दोनों में

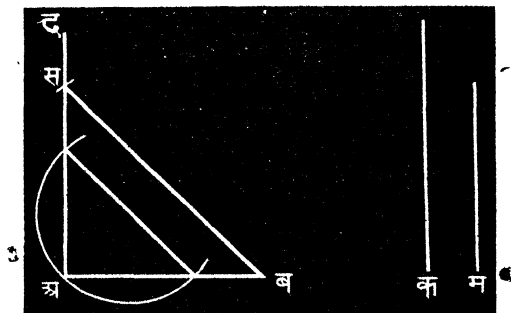
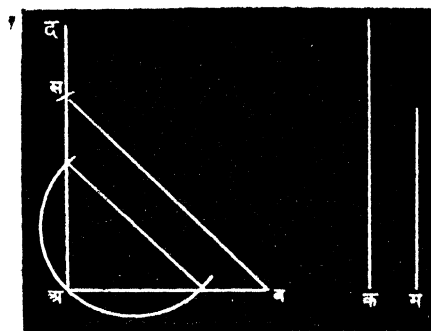
अ ब = म	(बनावट)
ब स = क	(बनावट)
<ब अ स = <च	(बनावट)

∴ अ ब स △ अभीष्ट हुआ

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि अ ब स′ भी जैसा कि आकृति १ में है अभीष्ट △ है।

यही करना था।

साध्य १२—वस्तूपपाद्य

साधारण प्रतिज्ञा—एक समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कर्ण और एक भुजा ज्ञात हैं।

मुख्य प्रतिज्ञा—कल्पना करो कि क और म दो दी हुई सीधी रेखा हैं जिसमें क, म से बड़ी है;

तो एक समकोण △ बनाना है जिसका कर्ण = क और भुजा = म हो।

बनावट—म के बराबर कोई सीधी रेखा अ ब खींचो।

अ ब सीधी रेखा के अ बिन्दु पर अ ब के साथ ⊥ बनाती हुई अ द रेखा खींचो
(सा० ३—ब०)

ब को केन्द्र मान कर और क के बराबर अर्द्धव्यास लेकर एक ⊙ खींचो जो अ द को स पर काटे

ब स को मिलाओ

तो अ ब स समकोण △ अभीष्ट होगा

उपपत्ति—	< ब अ स समकोण है	(बनावट)
	अ ब = म	(बनावट)
∵	ब स = क	(बनावट)

∴ अ ब स अभीष्ट समकोण △ बन गया।

यही करना था।

अभ्यास

१—एक △ बनाओ जो एक दिये हुए △ के, प्रत्येक दशा में बराबर हो।

२—एक समत्रिबाहु △ बनाओ जिसका आधार दिया हुआ है।
(रे०—सा० १ अ० १)

३—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका आधार और एक भुजा ज्ञात हैं।

४—दिये हुए आधार पर एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसकी प्रत्येक भुजा आधार से दूनी हो।

५—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका आधार और ⊥ ज्ञात हैं।

६—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका आधार और घेरा दिया हुआ है।

७—एक समकोण △ बनाओ जिसका कर्ण और एक न्यून कोण दिया हुआ है।

८—एक समकोण △ बनाओ जिसका कर्ण और आधार दिया हुआ है।

९—एक समकोण समद्विबाहु △ बनाओ जिसका कर्ण दिया हुआ है।

१०—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका लम्ब दिया हुआ है।

११—एक △ बनाओ जिसकी दो भुजा और लम्ब ज्ञात हैं।

१२—एक △ बनाओ जिसका आधार और भुजा, और ⊥ ज्ञात हैं।

१३—एक □ बनाओ जिसकी एक भुजा और दो कर्ण ज्ञात हैं।

१४—एक समकोण △ बनाओ जिसका कर्ण दिया हुआ है और जिसका एक न्यून < दूसरे न्यून < का आधा है।

१५—एक समकोण △ बनाओ जिसका आधार और आधार के सामने का < दिया हुआ है।

१६—एक विषमकोण सम चतुर्भुज बनाओ जिसकी प्रत्येक भुजा, उसके कर्णों में से किसी एक के = हो।

१७—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका शीर्षकोण और ⊥ दिया हुआ है।

१८—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका शीर्ष < आधार पर के प्रत्येक < का चौगुना है।

१९—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका आधार और शीर्ष < दिया हुआ है।

२०—एक समद्विबाहु △ बनाओ जिसका आधार दिया हुआ है और शीर्ष < और आधार पर के एक < का योग दिया हुआ है।